

ESERCIZIO 1. Discutere il principio di d'Alembert per sistemi vincolati.

ESERCIZIO 2. Data la funzione  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$H(x, y) = (x + 2)(y^2 - 2 + x^3 - 3x),$$

si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

(2.1) Determinare i punti d'equilibrio del sistema.

(2.2) Discuterne la stabilità.

(2.3) Studiare le curve di livello della funzione  $H(x, y)$ .

(2.4) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle traiettorie del sistema.

(2.5) Determinare esplicitamente la soluzione  $(x(t), y(t))$  con condizioni iniziali  $(-2, \bar{y})$  al variare di  $\bar{y} \in \mathbb{R}$ .

[SUGGERIMENTO. Si consiglia di studiare preliminarmente la curva di livello  $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$  prima di rispondere alle altre domande.]

ESERCIZIO 3. Dare la definizione di insiemi limite, enunciarne alcune proprietà e dimostrarne almeno una.