Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (25-06-2009)

<u>Esercizio 1.</u> [10] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(4x^2 + 6y^2 - 9\right), \\ \dot{y} = -2x\left(2x^2 + 4y^2 - 5\right). \end{cases}$$

(1.1) [1] Dimostrare che la funzione $H(x,y) = \left(x^2 + 3y^2 - 3\right)\left(x^2 + y^2 - 2\right)$ è una costante del moto.
(1.2) [2] Determinare i punti d'equilibrio.
(1.3) [3] Discuterne la stabilità.
(1.4) [4] Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.

<u>Esercizio 2.</u> [5] Si calcoli la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare in $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2, \\ \dot{x}_3 = 3x_3 + x_4, \\ \dot{x}_4 = 2x_4. \end{cases}$$

<u>Esercizio 3.</u> [3] Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^n$, con f di classe C^1. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) = 0$ e sia $R(x) = |x - x_0|^4$ (dove $|\cdot|$ indica la norma euclidea). Si assuma che $\langle \nabla R(x), f(x) \rangle < 0$ in $A_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x - x_0| < r\}$. Si dimostri che x_0 è asintoticamente stabile e si dia una stima del suo bacino d'attrazione.

<u>Esercizio 4.</u> [7]
(4.1) [3] Si definisca il problema dei due corpi in $\mathbb{R}^3$ e si trovino le equazioni del moto per la coordinata relativa e la coordinata del centro di massa.
(4.2) [2] Si definisca il momento angolare per il moto della coordinata relativa e si dimostri che si conserva.
(4.3) [2] Discutere cosa succede se si considera il problema in $\mathbb{R}^2$.

<u>Esercizio 5.</u> [12] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine O' si muova nel piano (x,y) lungo la guida di equazione

$$y = y(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 3, & x < 1, \\ 2\log x, & x \geq 1, \end{cases}$$

in modo tale che si abbia $x_{O'}(t) = t$. L'asse ζ e l'asse ξ si mantengono parallelo all'asse z e tangente alla guida, rispettivamente. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema di riferimento K lungo la direzione ξ con legge oraria $\xi(t) = \alpha\, t \sin t$, con $\alpha \in [0,1]$.
(5.1) [1] Dimostrare che la funzione $x \to y(x)$ che descrive la guida è di classe C^2.
(5.2) [2] Determinare la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, e determinare C e B.
(5.3) [1] Determinare la velocità assoluta del punto P.
(5.4) [1] Determinarne la velocità relativa.
(5.5) [1] Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento.
(5.6) [1] Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento.
(5.7) [2] Dimostrare che per $\alpha = 1$ e $t \geq 1$ il punto P non attraversa più l'asse x.
(5.8) [2] Dimostrare che per $\alpha = 1$ e $t \geq 1$ il punto P non attraversa più l'asse y.
(5.9) [1] Dimostrare che le proprietà ai punti (5.7) e (5.8) valgono per ogni $\alpha \in [0,1]$.
[*Suggerimento.* Per i punti (5.7)-(5.8) possono tornare utili le relazioni $\sin\theta = \tan\theta/\sqrt{1+\tan^2\theta}$ e $\cos\theta = 1/\sqrt{1+\tan^2\theta}$ per $|\theta| < \pi/2$.]

<u>Esercizio 6.</u> [7] Si consideri il sistema rigido costituito da 3 punti di massa m disposti ai vertici di un triangolo equilatero di lato ℓ.
(6.1) [1] Si determini il centro di massa del sistema.
(6.2) [2] Dimostrare che l'asse $\mathbf{e}$ ortogonale al triangolo e passante per il centro di massa è un asse d'inerzia.
(6.3) [2] Calcolare il momento principale d'inerzia corrispondente.
(6.4) [2] Determinare gli altri due assi d'inerzia.