

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2003/2004
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (07-09-2004)

ESERCIZIO 1. Teorema della scatola di flusso: enunciato e dimostrazione.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1, 1)$. Se ne trovi la soluzione.

ESERCIZIO 3. Operatore d'inerzia: definizione e proprietà.

ESERCIZIO 4. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muova lungo l'asse x del sistema assoluto con velocità costante $v = 1$, in modo tale che i rispettivi assi si mantengano paralleli e al tempo $t = 0$ i punti O e O' coincidano.

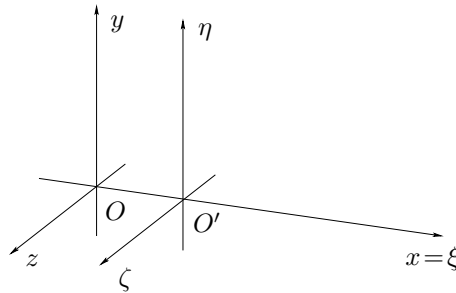


Figura 1. Sistemi di riferimento dell'esercizio 4.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ al tempo $t = 0$ si trova nel punto O e si muove in senso orario lungo una circonferenza di centro $C = (0, 1)$ e raggio $R = 1$ nel piano (ξ, η) , con velocità angolare $\Omega = 1$.

(4.1) Scrivere la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , *i.e.* $D = C \circ B$, e determinare C e B .

(4.2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.

(4.3) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .

(4.4) Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .

(4.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(4.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

(4.7) Determinare la forza di Coriolis \mathbf{F}_2 che agisce sul punto P .

(4.8) Discutere come cambia la descrizione del moto nel caso in cui il sistema di riferimento mobile ruoti in senso antiorario con velocità angolare α intorno all'asse ζ mentre l'origine O' scorre lungo l'asse x .