

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2003/2004  
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (07-09-2004)

ESERCIZIO 1. Teorema della scatola di flusso: enunciato e dimostrazione.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali  $x(0) = (1, 1, 1)$ . Se ne trovi la soluzione.

ESERCIZIO 3. Operatore d'inerzia: definizione e proprietà.

ESERCIZIO 4. Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muova lungo l'asse  $x$  del sistema assoluto con velocità costante  $v = 1$ , in modo tale che i rispettivi assi si mantengano paralleli e al tempo  $t = 0$  i punti  $O$  e  $O'$  coincidano.

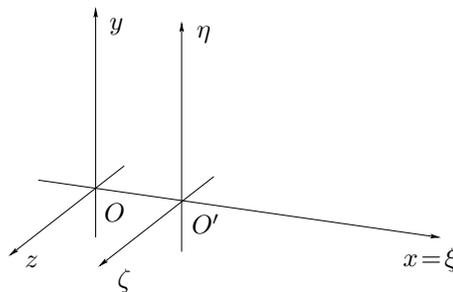


Figura 1. Sistemi di riferimento dell'esercizio 4.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  al tempo  $t = 0$  si trova nel punto  $O$  e si muove in senso orario lungo una circonferenza di centro  $C = (0, 1)$  e raggio  $R = 1$  nel piano  $(\xi, \eta)$ , con velocità angolare  $\Omega = 1$ .

(4.1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , *i.e.*  $D = C \circ B$ , e determinare  $C$  e  $B$ .

(4.2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema assoluto e  $\mathbf{Q}(t)$  nel sistema mobile.

(4.3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .

(4.4) Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .

(4.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .

(4.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .

(4.7) Determinare la forza di Coriolis  $\mathbf{F}_2$  che agisce sul punto  $P$ .

(4.8) Discutere come cambia la descrizione del moto nel caso in cui il sistema di riferimento mobile ruoti in senso antiorario con velocità angolare  $\alpha$  intorno all'asse  $\zeta$  mentre l'origine  $O'$  scorre lungo l'asse  $x$ .