Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2003/2004

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (08-02-2005)

ESERCIZIO 1. Dimostrare il seguente teorema. Sia $\dot{x} = Ax$ il sistema linearizzato del sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ nell'intorno del punto d'equilibrio x_0; se $\mathrm{Re}\lambda < -c$, con $c > 0$, per ogni autovalore λ della matrice A, allora x_0 è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 2. Discutere brevemente il problema dei due corpi.

ESERCIZIO 3. Data la funzione $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$H(x, y) = (x - y) \left(2x - 2y - x^2 - y^2 - 2xy + 4\right),$$

si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

(3.1) Determinare i punti d'equilibrio del sistema.
(3.2) Discuterne la stabilità.
(3.3) Studiare la curva di livello $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$ della funzione $H(x, y)$.
(3.4) Studiare in generale le curve di livello $\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$ al variare di E.
(3.5) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle traiettorie del sistema.