

**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

PROVA SCRITTA (21-06-2005)

Esercizio 1. Teorema di esistenza e unicità della soluzione per sistemi di equazioni differenziali lineari: enunciato e dimostrazione. Discutere anche la globalità della soluzione.

Esercizio 2. Data la funzione  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$H(x, y) = \frac{1 + (x^2 - 1)^2}{1 + y^2},$$

si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

(2.1) Determinare i punti d'equilibrio del sistema.

(2.2) Discuterne la stabilità.

(2.3) Studiare analiticamente le curve di livello della funzione  $H(x, y)$ , e darne una rappresentazione grafica.

(2.4) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle traiettorie del sistema.

(2.5) Dimostrare che la traiettoria con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1/\sqrt{3})$  è periodica.

(2.6) Scriverne il periodo  $T$  come integrale definito.

Esercizio 3. Teorema di Coriolis: dire che forma hanno le forze apparenti in un sistema di riferimento mobile, e darne la dimostrazione.