Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2004/2005

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova d'esame (21-06-2005)

CORREZIONE

Esercizio 2.

2.1. Punti d'equilibrio. Il sistema dinamico si scrive

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{2y}{(1+y^2)^2}\left(2+x^4-2x^2\right), \\ \dot{y} = -\dfrac{4x}{(1+y^2)}\left(x^2-1\right). \end{cases}$$

Si ha quindi $\dot{y} = 0$ se $x = 0$ oppure $x = \pm 1$, e $\dot{x} = 0$ se $y = 0$ oppure $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2 = 0$. L'ultima espressione per $x = 0$ dà $f(0) = 2 \neq 0$, per $x = \pm 1$ dà $f(\pm 1) = 1 - 2 + 2 = 1 \neq 0$. Quindi si hanno punti d'equilibrio solo per $y = 0$ e $x \in \{0, \pm 1\}$. In conclusione si hanno tre punti d'equilibrio

$$P_0 = (0,0), \qquad P_1 = (1,0), \qquad P_2 = (-1,0).$$

2.2. Stabilità dei punti d'equilibrio. Scriviamo il sistema dinamico nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ \dot{y} = g(x,y), \end{cases}$$

così che, nell'intorno del punto d'equilibrio $z_0 = (x_0, y_0)$, il sistema linearizzato si può scrivere

$$\dot{z} = A(z_0)\,z, \qquad z = (x,y), \qquad A(z_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0,0) & f_y(x_0,0) \\ g_x(x_0,0) & g_y(x_0,0) \end{pmatrix},$$

dove $f_x = \partial f/\partial x$, etc. Si è tenuto conto che $y_0 = 0$ per ogni punto d'equilibrio. Quindi, per lo stesso motivo, $f_x(x_0,0) = 0$ e, poiché $g(x,y)$ dipende da y solo attraverso y^2, si ha anche $g_y(x_0,0) = 0$. Occorre quindi solo calcolare $f_y(x_0,0)$ e $g_x(x_0,0)$. Alla prima derivata contribuisce solo il termine in cui deriviamo il numeratore, e quindi in $y = 0$ si trova $f_y(x_0,0) = -2(2 + x_0^4 - 2x_0^2)$. Per calcolare la derivata parziale $g_x(x_0,0)$ possiamo fissare subito $y = 0$ e quindi troviamo $g_x(x_0,0) = -12x_0^2 + 4$.

In conclusione si ha

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & -2(2 + x_0^4 - 2x_0^2) \\ 4 - 12x_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $z_0 = P_0 = (0,0)$ si trova

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha autovalori immaginari $\lambda = \pm i4$. Quindi in tal caso dallo studio del sistema linearizzato non si può concludere nulla.

Se $z_0 = P_1$ oppure $z_0 = P_2$ si ha

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha autovalori reali $\lambda = \pm 4$: uno dei due autovalori ha parte reale positiva, e quindi i punti d'equilibrio P_1 e P_2 sono punti d'equilibrio instabile.

Rimandiamo a dopo la discussione della stabilità di P_0.

2.3. Curve di livello. In corrispondenza dei punti d'equlibrio si ha

$$H(P_0) = 2, \qquad H(P_1) = 1, \qquad H(P_2) = 1.$$

Consideriamo la curva di livello

$$\Gamma_1 = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : H(x,y) = 1 \Big\}.$$

Si ha $(x,y) \in \Gamma_1$ se

$$1 + \big(x^2 - 1\big)^2 = 1 + y^2,$$

i.e. se

$$\big(x^2 - 1\big)^2 = y^2,$$

che dà

$$y = \pm y(x) = \pm |x^2 - 1|.$$

Quindi la curva di livello Γ_1 è come rappresentata in Figura 1. Basta studiare la funzione $x \to y$ per $y > 0$. Per $|x| \leq 1$ si ha $y(x) = 1 - x^2$ che definisce un arco di parabola orientata verso il basso, con vertice in $(x,y) = (0,1)$ e intersezioni con l'asse x in $x = \pm 1$. Per $|x| \geq 1$ si ha $y(x) = x^2 - 1$, che definisce i due archi con $|x| > 1$ della

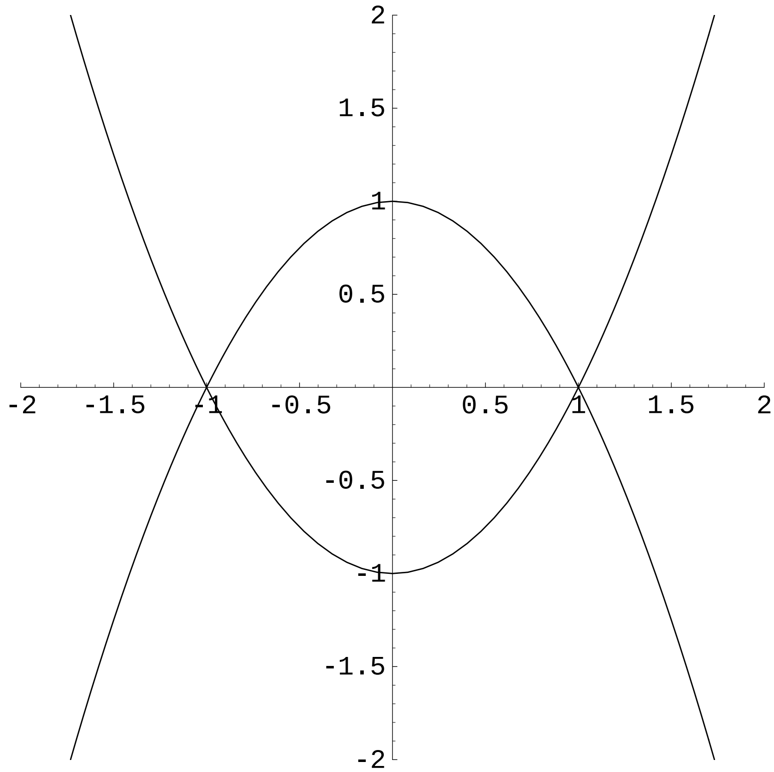

Figura 1. Curva di livello Γ_1.

parabola orientata verso l'alto, con vertice in $(x, y) = (0, -1)$ e, di nuovo, intersezioni con l'asse x in $x = \pm 1$.

Si consideri la regione chiusa U definita da

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1 - x^2 \right\}.$$

Sulla frontiera ∂U di U la funzione H vale 1, mentre in $(x, y) = P_0$ si ha $H(0, 0) = 2$. Inoltre P_0 è l'unico punto stazionario di H nell'interno di U. Poiché la funzione H deve assumere i suoi valori di massimo e di minimo nell'insieme compatto U o in corrispondenza dei punti stazionari interni o sulla frontiera, possiamo concludere che P_0 è un punto di massimo per $H(x, y)$ in U.

Di conseguenza possiamo definire la funzione di Ljapunov

$$W(x, y) = H(0, 0) - H(x, y).$$

Risulta $W(0, 0) = 0$ e $W(x, y) > 0$ in $U \backslash \{0, 0\}$, e $\dot{W} = \dot{H} = 0$ (poiché H è una costante del moto). Quindi sono soddisfatte le ipotesi sotto le quali si applica il teorema di Ljapunov per concludere che il punto d'equilibrio P_0 è un punto d'equilibrio stabile.

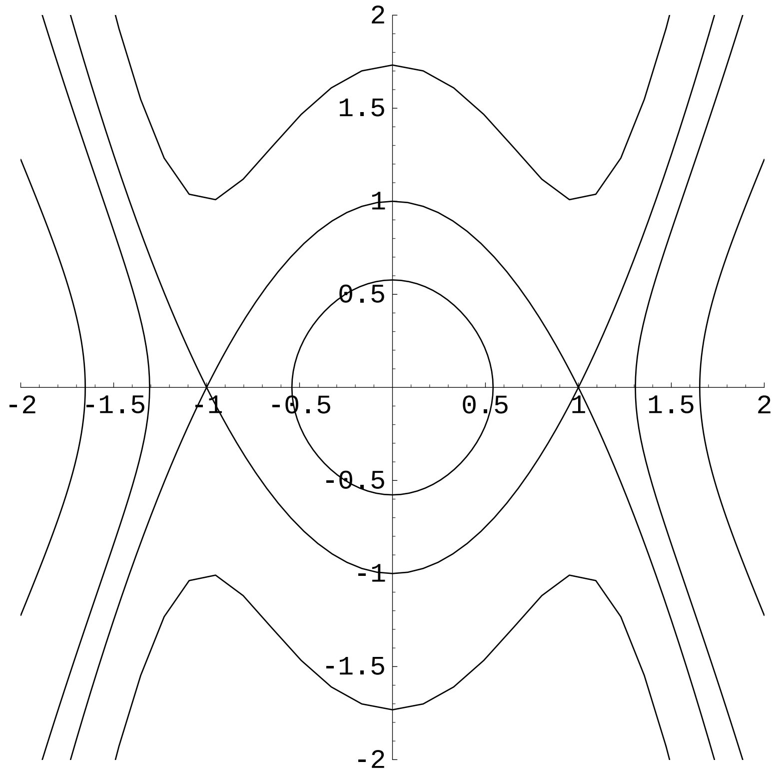

Figura 2. Curve di livello della funzione $H(x, y)$.

Le altre curve di livello sono rappresentate in Figura 2.
In generale la curva di livello Γ_E è definita da

$$1 + \left(x^2 - 1\right)^2 = E\left(1 + y^2\right),$$

per $E > 0$ (poiché la funzione H è sempre strettamente positiva). Quindi

$$y^2 = \frac{1}{E}\left(1 + \left(x^2 - 1\right)^2 - E\right).$$

Deve risultare quindi

$$\left(x^2 - 1\right)^2 \geq E - 1.$$

Se $E < 1$ si ha $E - 1 \leq 0$ e quindi ogni valore di x è possibile. Si ha in tal caso

$$y = y_{\pm}(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{E}\left(1 + (x^2 - 1)^2 - E\right)}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

che definisce due curve, una nel semipiano superiore e una nel semipiano inferiore.

Se $E > 1$ si deve avere

$$\left|x^2 - 1\right| \geq \sqrt{E-1}.$$

e quindi si hanno in principio tre curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$, le prime due definite per x tale che $x^2 - 1 \geq E - 1$, i.e. per $x^2 \geq E$, ovvero $x \geq \sqrt{E}$ o $x \leq -\sqrt{E}$, la terza definita per $x^2 - 1 \leq 1 - E$, i.e. $|x| \leq \sqrt{2-E}$. Si vede quindi che le curve

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \sqrt{E}, \quad y = y_\pm(x)\right\}, \\
\mathcal{C}_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -\sqrt{E}, \quad y = y_\pm(x)\right\}
\end{aligned}$$

sono definite per ogni valore di $E > 1$, e sono una nel semipiano $x \geq \sqrt{E}$ e una nel semipiano $x \leq -\sqrt{E}$.

Invece la curva

$$\mathcal{C}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2-E} \leq x \leq \sqrt{2-E}, \quad y = y = y_\pm(x)\right\}$$

esiste solo per $E \leq 2$. Per $E = 2$ si riduce a un unico punto, che risulta essere il punto d'equilibrio P_0. Per $E \in (1,2)$ descrive invece una curva chiusa che gira intorno al punto d'equilibrio P_0.

2.4. Analisi qualitativa. Le traiettorie devono essere contenute nelle curve di livello trovate al punto precedente. Riguardo ai versi di percorrenza, si ha $\dot{y} > 0$ se $x > 0$ e $x^2 < 1$ oppure se $x < 0$ e $x^2 > 1$, quindi $\dot{y} > 0$ se $0 < x < 1$ oppure se $x < -1$. Il verso di $\dot{x}$ si può ricavare per consistenza, tenendo conto del verso di $\dot{y}$ e del fatto che la traiettoria si svolge su una curva di livello. In conclusione

$$\begin{aligned}
x < -1, y < 0 &\Longrightarrow \dot{x} > 0, \dot{y} > 0, \\
x < -1, y > 0 &\Longrightarrow \dot{x} < 0, \dot{y} > 0, \\
-1 < x < 0, y < 0 &\Longrightarrow \dot{x} > 0, \dot{y} < 0, \\
-1 < x < 0, y > 0 &\Longrightarrow \dot{x} < 0, \dot{y} < 0, \\
0 < x < 1, y < 0 &\Longrightarrow \dot{x} > 0, \dot{y} > 0, \\
0 < x < 1, y > 0 &\Longrightarrow \dot{x} < 0, \dot{y} > 0, \\
x > 1, y < 0 &\Longrightarrow \dot{x} > 0, \dot{y} < 0, \\
x > 1, y > 0 &\Longrightarrow \dot{x} < 0, \dot{y} < 0.
\end{aligned}$$

2.5. Traiettoria periodica. Se $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1/\sqrt{3})$ si ha

$$H(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1 + (-1)^2}{1 + (1/3)} = \frac{2}{4/3} = \frac{3}{2},$$

quindi $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_{3/2}$. Il dato iniziale si trova quindi su una orbita chiusa che circonda l'origine, e la corrispondente traiettoria è periodica.

2.6. Periodo. la curva di livello $\Gamma_{3/2}$ interseca l'asse x nei punti $x = x_\pm$ tali che

$$1 + \left(x^2 - 1\right)^2 = \frac{3}{2},$$

ovvero

$$|x^2 - 1| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Poiché $|x_\pm| < 1$ si ha quindi $1 - x_\pm^2 = 1/\sqrt{2}$, i.e. $x_\pm^2 = 1 - 1/\sqrt{2}$, quindi

$$x_\pm = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm x_0.$$

Sulla curva di livello $\Gamma_{3/2}$ si ha inoltre

$$y = Y_\pm(x), \qquad Y_\pm(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\left((x^2-1)^2 - 1\right)},$$

che descrive una curva pari in y nel piano (x, y). Lungo tale curva si ha

$$\dot{x} = \frac{2Y_\pm(x)}{(1 + Y_\pm^2(x))^2}\left(2 + x^4 - 2x^2\right) \equiv X_\pm(x),$$

e si deve prendere la detrminazione positiva $Y_+(x)$ nel semipiano superiore e la determinazione negativa $Y_-(x)$ nel semipiano inferiore.

Quindi il periodo T è

$$T = 2\int_{-x_0}^{x_0} \mathrm{d}x\, \frac{1}{X_+(x)},$$

dove la costante x_0 e la funzione $X_+(x)$ sono come definite sopra.