

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (12-07-2005)

ESERCIZIO 1. Discutere le equazioni di Eulero per i sistemi rigidi.

ESERCIZIO 2. Data la funzione  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$H(x, y) = x^2 (y - |x|) (y - 1),$$

si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

(2.1) Determinare i punti d'equilibrio del sistema.

(2.2) Discutere la stabilità.

(2.3) Studiare le curve di livello della funzione  $H(x, y)$ .

(2.4) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle traiettorie del sistema.

(2.5) Dimostrare che la traiettoria con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/4, 3/4)$  è periodica.

(2.6) Discutere il moto con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/4, 1)$ .

[*Suggerimento.* Per discutere la derivabilità della funzione  $H$  in  $x = 0$ , si dimostra prima l'esistenza delle derivate destra e sinistra, e se ne discute quindi la continuità.]

ESERCIZIO 3. Equazioni a variabili separabili.

ESERCIZIO 4. Dare la definizione di punto d'equilibrio stabile, instabile, asintoticamente stabile e attrattivo, e fare degli esempi.