Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2004/2005

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (12-07-2005)

<u>Esercizio 1.</u> Discutere le equazioni di Eulero per i sistemi rigidi.

<u>Esercizio 2.</u> Data la funzione $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$H(x,y) = x^2\,(y-|x|)\,(y-1)\,,$$

si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

(2.1) Determinare i punti d'equilibrio del sistema.
(2.2) Discuterne la stabilità.
(2.3) Studiare le curve di livello della funzione $H(x,y)$.
(2.4) Utilizzare i risultati precedenti per lo studio qualitativo delle traiettorie del sistema.
(2.5) Dimostrare che la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x},\bar{y}) = (1/4, 3/4)$ è periodica.
(2.6) Discutere il moto con dati iniziali $(\bar{x},\bar{y}) = (1/4, 1)$.
[*Suggerimento.* Per discutere la derivabilità della funzione H in $x=0$, si dimostra prima l'esistenza delle derivate destra e sinistra, e se ne discute quindi la continuità.]

<u>Esercizio 3.</u> Equazioni a variabili separabili.

<u>Esercizio 4.</u> Dare la definizione di punto d'equilibrio stabile, instabile, asintoticamente stabile e attrattivo, e fare degli esempi.