

**FM1 - Equazioni differenziali e meccanica**

PROVA SCRITTA (06-09-2005)

ESERCIZIO 1. Teorema di Barbašin-Krasovskij: enunciato e dimostrazione.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali  $x(0) = (1, 1, 0)$ . Si trovi la soluzione  $x(t)$ .

ESERCIZIO 3. Sia dato il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale di massa  $m$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = 4x^6 - 6ax^4,$$

con  $a \in \mathbb{R}$ . Al variare del parametro  $a$  si risponda alle seguenti domande.

- (2.1) Scrivere il sistema dinamico associato.
- (2.2) Determinarne i punti d'equilibrio.
- (2.3) Discutere la stabilità secondo Ljapunov dei punti d'equilibrio trovati.
- (2.4) Discutere qualitativamente il sistema nel piano delle fasi  $(x, y) = (x, \dot{x})$ .
- (2.5) Individuare analiticamente l'insieme dei dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.
- (2.6) Individuare analiticamente l'insieme dei dati iniziali che danno luogo a traiettorie asintotiche.

ESERCIZIO 4. Operatore d'inerzia, assi d'inerzia e momenti principali d'inerzia: darne le definizioni e dimostrane le proprietà fondamentali.