

ESERCIZIO 1. Teorema di Ljapunov: enunciato e dimostrazione.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$G(\dot{x})\ddot{x} + F(x) = 0,$$

dove G e F sono due funzioni di classe C^2 .

(2.1) Dimostrare che la funzione $H(x, \dot{x})$, con

$$H(x, y) = \int_0^x dx' F(x') + \int_0^y dy' y' G(y'),$$

è una costante del moto.

(2.2) Si assuma nel seguito $G(y) = (1 + y^2)^{-1}$ e $F(x) = x$, e si consideri il sistema dinamico corrispondente.

(2.2.1) Calcolare $H(x, y)$.

(2.2.2) Dimostrare che tutte le traiettorie sono limitate.

(2.2.3) Studiare le curve di livello della funzione $H(x, y)$.

(2.2.4) Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.

(2.2.5) Dimostrare che in presenza d'attrito l'origine diventa un punto d'equilibrio asintoticamente stabile, e stimarne il bacino d'attrazione.

ESERCIZIO 3. Discutere le leggi di Keplero in relazione al problema dei due corpi.