

ESERCIZIO 1. [5] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si calcoli A^k per ogni $k \in \mathbb{N}$ e si usi il risultato per calcolare $\exp A$.

ESERCIZIO 2. [5] Dato il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ in \mathbb{R}^n , sia x_0 un punto d'equilibrio. Si supponga che esistano una funzione $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e un intorno $B(x_0)$ di x_0 tali che

(i) $W(x_0) = 0$ e $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$,

(ii) $\dot{W}(x_0) \leq 0 \forall x \in B(x_0)$.

Si dimostri che x_0 è un punto d'equilibrio stabile.

ESERCIZIO 3. [10] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 2x^2 - x^4 - 1, \\ \dot{y} = -2x(2y - 3x^4 + 4x^2 - 1 - 2x^2y). \end{cases}$$

(3.1) Dimostrare che la funzione

$$H(x, y) = (y + x^2 - 1)(y - x^4 + x^2)$$

è una costante del moto per il sistema.

(3.2) Determinare i punti d'equilibrio del sistema.

(3.3) Discuterne la stabilità.

(3.4) Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema nel piano (x, y) .

ESERCIZIO 4. [5] Formulare il problema dei due corpi. Dimostrare che il problema a 6 gradi di libertà si può ridurre a 2 problemi disaccoppiati a 3 gradi di libertà ciascuno.

ESERCIZIO 5. [10] Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \alpha \log \rho,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si discuta il moto della variabile $\rho(t)$, rispondendo alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare del sistema.

(5.1) Scrivere l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.

(5.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(5.3) Disegnare il grafico del potenziale efficace.

(5.4) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(5.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(5.6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 6. [5] Enunciare e dimostrare il teorema di König.