Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

PROVA SCRITTA (07-06-2007)

ESERCIZIO 1. [12] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), il cui asse ζ si mantenga parallelo all'asse z del sistema fisso e la cui origine O' si muova nel piano (x, y) lungo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con velocità angolare costante ω_1. Il sistema di riferimento mobile ruota intorno all'asse ζ, con velocità angolare costante ω_2. All'istante $t = 0$ il punto O' ha coordinata $x_{O'}(0) = 1$ e l'asse ξ è diretto lungo l'asse x. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema mobile lungo una circonferenza di raggio $R = 1$ e centro O' con velocità angolare costante ω_3. All'istante iniziale il vettore che individua il punto P forma un angolo φ con l'asse ξ.
(1.1) Scrivere la trasformazione rigida D: $K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, *i.e.* $D = C \circ B$, e determinare C e B.
(1.2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.
(1.3) Determinare la velocità assoluta $\mathbf{v}$.
(1.4) Determinare la velocità relativa $\mathbf{v}'$.
(1.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_0$.
(1.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T$.
(1.7) Fissati ω_1 e ω_2, è possibile scegliere ω_3 e φ in modo tale che nel sistema di riferimento fisso il punto P sia fermo nell'origine O?

ESERCIZIO 2. [6] Enunciare e dimostrare il lemma di Gronwall. Utilizzare quindi il lemma per dimostrare il teorema della dipendenza continua dai dati iniziali per equazioni differenziali del primo ordine.

ESERCIZIO 3. [8] Si calcoli l'esponenziale della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e si usi il risultato per trovare la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x} = A\,x$ con condizioni iniziali $x(0) = (1, 1)$.

ESERCIZIO 4. [14] Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\rho^4}{4} - \frac{\alpha}{8\rho^8},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare del parametro α e del momento angolare L, si risponda alle seguenti domande.
(4.1) Si scriva l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.
(4.2) Si determinino i punti d'equilibrio.
(4.3) Si discuta la stabilità dei punti d'equilibrio.
(4.4) Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
(4.5) Si analizzino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(4.6) Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
(4.7) Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 5. [6] Sia B una matrice ortogonale che dipenda da un parametro t. Dimostrare che la matrice $A = \dot{B}B^{-1}$ è antisimmetrica ($\dot{B}$ denota la derivata di B rispetto al parametro t). Dimostrare che esiste un vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che per ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ si abbia $A\mathbf{x} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}]$, dove $[\cdot, \cdot]$ denota il prodotto vettoriale.

ESERCIZIO 6. [4] Dare la definizione di insieme ω-limite, e illustrarne qualche esempio.