Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (07-06-2007)

CORREZIONE

Esercizio 1.

1.1. Trasformazione rigida. L'origine O' del sistema di riferimento mobile si muove secondo la legge

$$\mathbf{q}_{O'}(t) = \mathbf{r}(t) = (\cos\omega_1 t, \sin\omega_1 t, 0)\,,$$

dove si è tenuto conto che $\mathbf{q}_{O'}(0) = (1, 0, 0)$.

Se $B(t)$ denota la matrice di rotazione del sistema mobile rispetto a quello fisso si ha

$$B = B(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega_2 & -\sin\omega_2 t & 0 \\ \sin\omega_2 t & \cos\omega_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e quindi $D = C(t) \circ B(t)$, dove $C(t)$ è la traslazione di $\mathbf{r}(t)$.

1.2. Soluzione dell'equazione del moto. Nel sistema mobile si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (\cos(\omega_3 t + \varphi), \sin(\omega_3 t + \varphi), 0)\,,$$

poiché per ipotesi a $t = 0$ sia ha $\mathbf{Q}(0) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. Quindi nel sistema fisso si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(t) = B(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} \cos\omega_2 t & -\sin\omega_2 t & 0 \\ \sin\omega_2 t & \cos\omega_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_3 t + \varphi) \\ \sin(\omega_3 t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\omega_1 t \\ \sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi) + \cos\omega_1 t \\ \sin(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi) + \sin\omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che

$$\begin{aligned}\cos\omega_2 t\cos(\omega_3 t + \varphi) - \sin\omega_2 t\sin(\omega_3 t + \varphi) &= \cos(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi), \\ \sin\omega_2 t\cos(\omega_3 t + \varphi) + \cos\omega_2 t\sin(\omega_3 t + \varphi) &= \sin(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi),\end{aligned}$$

così che

$$\mathbf{q}(t) = (\cos(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi) + \cos\omega_1 t, \sin(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi) + \sin\omega_1 t, 0)\,.$$

1.3. Velocità assoluta. Si ha

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = (-(\omega_2 + \omega_3)\sin(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi) - \omega_1\sin\omega_1 t, (\omega_2 + \omega_3)\cos(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi) + \omega_1\cos\omega_1 t, 0)\,.$$

1.4. Velocità relativa. Si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' = B(t)\dot{\mathbf{Q}}(t) &= (-\omega_3\cos\omega_2 t\sin(\omega_3 t + \varphi) - \omega_3\sin\omega_2 t\cos(\omega_3 t + \varphi), \\ &\qquad -\omega_3\sin\omega_2 t\sin(\omega_3 t + \varphi) + \omega_3\cos\omega_2 t\cos(\omega_3 t + \varphi), 0) \\ &= (-\omega_3\sin(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi), \omega_3\cos(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi), 0)\,,\end{aligned}$$

poiché $\dot{\mathbf{Q}}(t) = (-\omega_3 \sin(\omega_3 t + \varphi), \omega_3 \cos(\omega_3 t + \varphi), 0)$.

1.5. Componente traslatoria della velocità di trascinamento. Si ha

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t) = (-\omega_1 \sin \omega_1 t, \omega_1 \cos \omega_1 t, 0)\,.$$

1.6. Componente rotatoria della velocità di trascinamento. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{q}(t) - \mathbf{r}(t)] &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \omega_2 t \\ \cos(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi) & \sin(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi) & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-\omega_2 \sin(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi), \omega_2 \cos(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi), 0)\,, \end{aligned}$$

e si può facilmente verificare che $\mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T = \mathbf{v}$.

2.7. Punto fermo. Perché il punto P risulti fermo nell'origine del sistema fisso si deve avere $\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, i.e.

$$\cos(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi) + \cos \omega_1 t = 0, \qquad \sin(\omega_2 t + \omega_3 t + \varphi) + \sin \omega_1 t = 0.$$

Si può per esempio scegliere $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ e $\varphi = \pi$ così che le due equazioni diventano

$$\cos(\omega_1 t + \pi) = -\cos \omega_1 t, \qquad \sin(\omega_1 t + \pi) = -\sin \omega_1 t,$$

che sono ovviamente soddisfatte poiché

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \pi) &= \cos \alpha \cos \pi - \sin \alpha \sin \pi = -\cos \alpha, \\ \sin(\alpha + \pi) &= \sin \alpha \cos \pi + \cos \alpha \sin \pi = -\sin \alpha, \end{aligned}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{T}$.

<u>Esercizio 2.</u> Cfr. Cap. 3, §11, lemma 11.2 e paragrafo 11.3 (lemma di Gronwall) e paragrafo 11.7 (teorema della dipendenza continua dai dati iniziali).

<u>Esercizio 3.</u> Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \pm 1,$$

quindi A ha due autovalore reali distinti, ed è pertanto diagonalizzabile.

Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & \Longrightarrow \qquad v_1 = (1, 1), \\ \lambda_2 = -1 & \Longrightarrow \qquad v_2 = (-1, 1). \end{cases}$$

Quindi la matrice del cambiamento di base è data da

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

così che

$$Q^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha allora

$$B = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^{Bt} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix},$$

e quindi

$$e^{At} = Q^{-1}e^{Bt}Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$x(t) = e^{At}x(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

così che la soluzione è $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, con

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^t + e^{-t} + e^t - e^{-t}\right) = e^t, \\ x_2(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^t - e^{-t} + e^t + e^{-t}\right) = e^t. \end{cases}$$

<u>Esercizio 4.</u>

4.1. Equazione del moto e sistema dinamico associato. Si ha

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\rho) &= V(\rho) + \frac{L^2}{\mu\rho^2} = \frac{\rho^4}{4} - \frac{\alpha}{8\rho^8} + \frac{\beta}{2\rho^2}, \\ V'_{\text{eff}}(\rho) &= \rho^3 + \frac{\alpha}{\rho^9} - \frac{\beta}{\rho^3} = \frac{1}{\rho^9}\left(\rho^{12} - \beta\rho^6 + \alpha\right), \\ V''_{\text{eff}}(\rho) &= 3\rho^2 - \frac{9\alpha}{\rho^{10}} + \frac{3\beta}{\rho^4} = \frac{3}{\rho^{10}}\left(\rho^{12} + \beta\rho^6 - 3\alpha\right), \end{aligned}$$

dove $\beta = L^2/\mu \in \mathbb{R}_+$.

L'equazione del moto per la variabile radiale è allora

$$\mu\ddot{\rho} = -V'_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{1}{\rho^9}\left(\rho^{12} - \beta\rho^6 + \alpha\right),$$

e il sistema dinamico associato è

$$\begin{cases} \dot{\rho} = y, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{\mu}V'_{\text{eff}}(\rho) = \dfrac{1}{\mu\rho^9}\left(\rho^{12} - \beta\rho^6 + \alpha\right). \end{cases}$$

4.2. Punti d'equilibrio. I punti d'equilibrio sono della forma $(\rho, y) = (\rho_0, 0)$ con $V'_{\text{eff}}(\rho_0) = 0$.

Consideriamo prima il caso $\beta > 0$. La funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ è definita per $\rho > 0$, e si ha

$$\lim_{\rho\to 0} V_{\text{eff}}(\rho) = \begin{cases} -\infty, & \alpha > 0, \\ +\infty, & \alpha \le 0, \end{cases} \qquad \lim_{\rho\to\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty,$$

poiché per $\rho \to 0$ il termine dominante, per $\alpha \neq 0$, è $-\alpha/8\rho^2$, che diverge a $-\infty$ se $\alpha > 0$ e a $+\infty$ se $\alpha < 0$, e, per $\alpha = 0$, è $\beta/2\rho^2$ che va a $+\infty$.

Si ha inoltre $V'_{\text{eff}}(\rho) = 0$ per

$$\rho^{12} - \beta\rho^6 + \alpha = 0,$$

che è un'equazione di secondo grado in $x = \rho^6$.

Le radici dell'equazione $x^2 - \beta x + \alpha = 0$ sono

$$x_\pm = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2},$$

così che non ci sono radici reali per $\alpha > \beta^2/4$.

Se invece $\alpha = \beta^2/4$ si ha una sola radice $\beta/2$. Se $0 < \alpha < \beta^2/4$ si ha $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha} < \beta$, e quindi si hanno due radici positive distinte. Se $\alpha = 0$ si ha una radice nulla e una positiva. Se infine $\alpha < 0$ una radice è negativa e una positiva. Poiché $x = \rho^6 > 0$ per $\rho > 0$ solo le radici strettamente positive devono essere considerate.

In conclusione non ci sono punti d'equilibrio per $\alpha > \beta^2/4$, si ha un unico punto d'equilibrio $\rho_0 = (\beta/2)^{1/6}$ per $\alpha = \beta^2/4$, si hanno due punti d'equilibrio distinti

$$\rho_1 = \left(\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2} \right)^{1/6}, \qquad \rho_2 = \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2} \right)^{1/6},$$

per $0 < \alpha < \beta^2/4$, e di nuovo un solo punto d'equilibrio

$$\rho_0 = \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2} \right)^{1/6},$$

per $\alpha \leq 0$ (che diventa $\rho_0 = \beta^{1/6}$ per $\alpha = 0$).

Se infine $\beta = 0$ l'equazione per x si riduce a $x^2 + \alpha = 0$, che non ammette radici reali per $\alpha > 0$, mentre ammette una sola radice $x = 0$ per $\alpha = 0$ e due radici reali distinte $x = \pm(-\alpha)^{1/2}$, di cui solo una positiva $x = (-\alpha)^{1/2}$, per $\alpha < 0$.

Per $\beta = 0$ (i.e. $L = 0$) il moto si svolge lungo una retta, quindi ρ si deve considerare su tutto $\mathbb{R}$. Non si hanno quindi punti d'equlibrio per $\alpha > 0$, si ha un unico punto d'equilibrio $\rho_0 = 0$ per $\alpha = 0$ e si hanno due punti d'equilibrio distinti

$$\rho_0 = \pm(-\alpha)^{1/12}$$

per $\alpha < 0$. Si noti che per $\beta = 0$ l'energia potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$ è definita e pari in tutto $\mathbb{R}$.

4.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Per $\beta > 0$ e $\alpha = \beta^2/4$ il punto stazionario $(\beta/2)^{1/6}$ è un punto di flesso orizzontale (infatti per $\alpha = \beta^2/4$ si ha $V''_{\text{eff}}((\beta/2)^{1/6}) = 0$), e quindi, per tali valori di α e β, $(\rho_0, 0) = ((\beta/2)^{1/6}, 0)$ è un punto d'equilibrio instabile per il sistema dinamico associato (cfr. anche l'analisi qualitativa discussa al punto 4.4).

Per $\beta > 0$ e $0 < \alpha < \beta^2/4$ il punto stazionario ρ_1 è un punto di massimo e il punto ρ_2 è un punto di minimo per l'energia potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$.

Per $\alpha \leq 0$ il punto ρ_0 è un punto di minimo per l'energia potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$.

Possiamo quindi concludere che per $\beta > 0$ e $\alpha \in (0, \beta^2/4)$ il punto $(\rho_2, 0)$ è un punto d'equilibrio stabile per il sistema dinamico associato (per il teorema di Dirichlet), mentre il punto $(\rho_1, 0)$ è un punto d'equilibrio instabile (cfr. anche l'analisi qualitativa discussa al punto 4.4).

Per $\beta > 0$ e $\alpha \leq 0$ il punto $(\rho_0, 0)$ è un punto d'equilibrio stabile per il sistema dinamico associato, di nuovo per il teorema di Dirichlet.

Infine se $\beta = 0$ e $\alpha = 0$ il punto $\rho_0 = 0$ è un punto d'equilibrio stabile, e infine se $\beta = 0$ e $\alpha < 0$ i punti $(\pm(-\alpha)^{1/12}, 0)$ sono punti d'equilibrio stabile: di nuovo la stabilità segue dal teorema di Dirichlet.

4.4. Grafico dell'energia potenziale efficace. Si ha $V''_{\text{eff}}(\rho) = 0$ per $x = \rho^6$ tale che $x^{12} + \beta x - 3\alpha = 0$, quindi per

$$\widetilde{x}_\pm = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 12\alpha}}{2},$$

quindi per avere zeri positivi di $V''_{\text{eff}}(\rho)$ si deve avere $\alpha \geq 0$. In tal caso la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ cambia concavità per $\rho = \widetilde{\rho}$, con

$$\widetilde{\rho} = \left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 12\alpha} - \beta}{2} \right)^{1/6},$$

ovvero $V_{\text{eff}}(\rho)$ è concava per $r < \widetilde{\rho}$ e convessa per $\rho > \widetilde{\rho}$.

Per $\beta > 0$ e $\alpha \geq \beta^2/4$ si ha $V'_{\text{eff}} > 0$, quindi la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ è strettamante crescente ed è concava per $r < \widetilde{\rho}$ e convessa per $\rho > \widetilde{\rho}$. Per $\alpha = \beta^2/4$ si ha $\rho_0 = \widetilde{\rho} = \beta/2$. Cfr. la Figura 1 per $\alpha > \beta^2/4$ e la Figura 2 per $\alpha = \beta^2/4$.

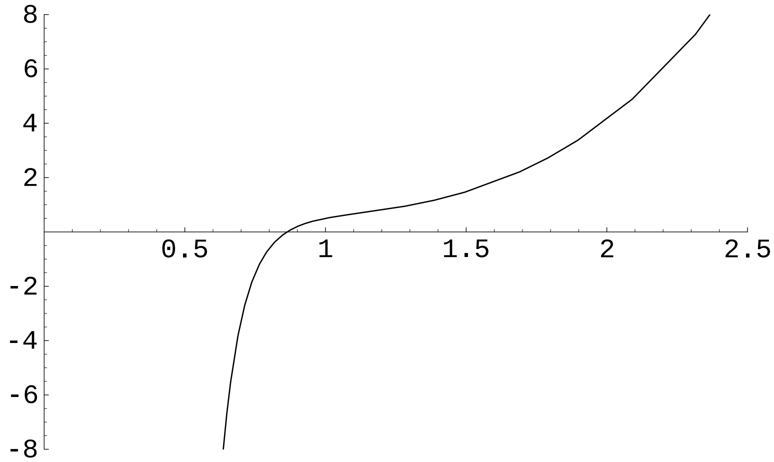

Figura 1. Grafico dell'energia potenziale $V_{\text{eff}}(\rho)$ per $\beta > 0$ e $\alpha > \beta^2/4$.

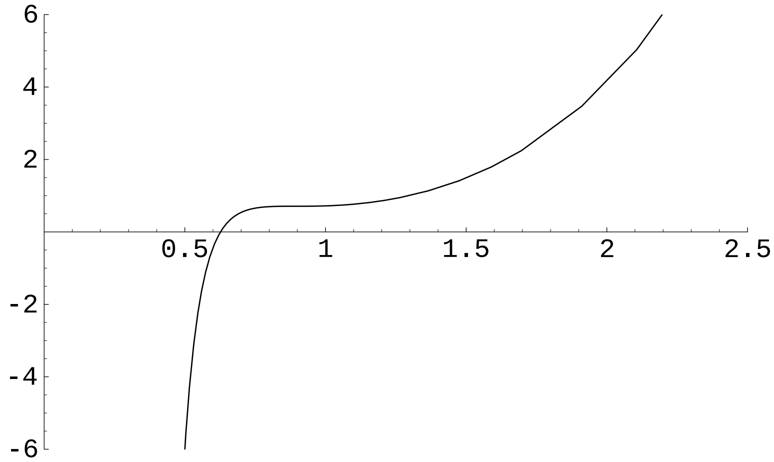

Figura 2. Grafico dell'energia potenziale $V_{\text{eff}}(\rho)$ per $\beta > 0$ e $\alpha = \beta^2/4$.

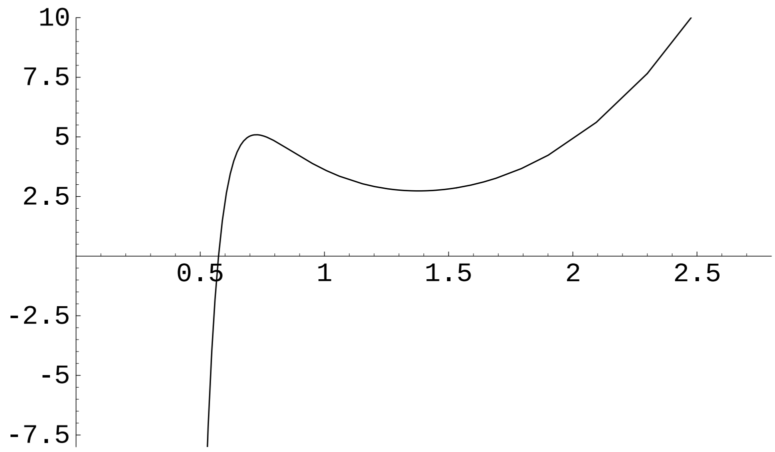

Figura 3. Grafico dell'energia potenziale $V_{\text{eff}}(\rho)$ per $\beta > 0$ e $0 < \alpha < \beta^2/4$.

Per $\beta > 0$ e $0 < \alpha < \beta^2/4$ la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ ha un punto di massimo relativo in $\rho = \rho_1$ e un punto di minimo relativo in $\rho = \rho_2$. La funzione cambia concavità una volta sola, poiché $V''_{\text{eff}}(\rho)$ ha un unico zero $\widetilde{\rho}$, con $\rho_1 < \widetilde{\rho} < \rho_2$ Si ha quindi la situazione rappresentata in Figura 3. Si noti che per $\alpha \to \beta^2/4$ si ha $\rho_1, \rho_2 \to \widetilde{\rho}$.

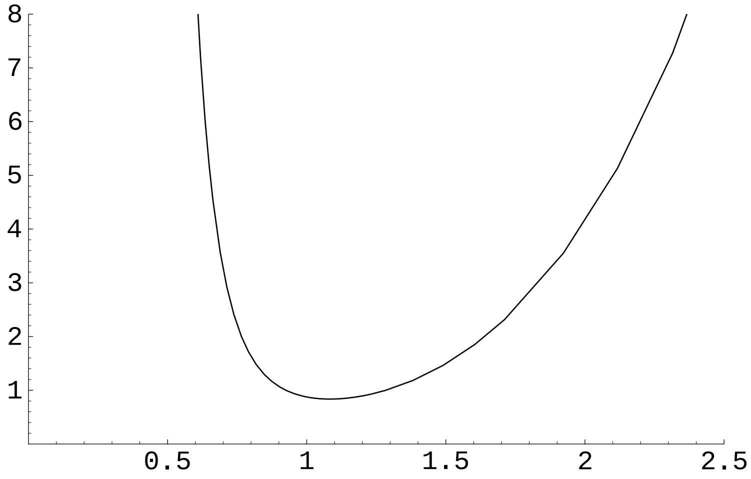

Figura 4. Grafico dell'energia potenziale $V_{\text{eff}}(\rho)$ per $\beta > 0$ e $\alpha \leq 0$.

Per $\beta > 0$ e $\alpha \leq 0$ la funzione $V_{\text{eff}}(\rho)$ ha un punto di minimo in ρ_0 ed è convessa; cfr. la Figura 4.

Per $\beta = 0$ e $\alpha > 0$ si ha il grafico di Figura 5: l'energia potenziale efficace è definita su tutto l'asse reale poiché il moto è un moto unidimensionale, e diverge a $-\infty$ per $\rho \to 0$. La funzione $V_{\text{eff}}(\rho) = V(r)$ cambia concavità nei punti

$$\widetilde{\rho}_{\pm} = \pm\,(3\alpha)^{1/12}\,,$$

ed è concava per $0 < |\rho| < \widetilde{\rho}_+$ e convessa per $|\rho| > \widetilde{\rho}_+$.

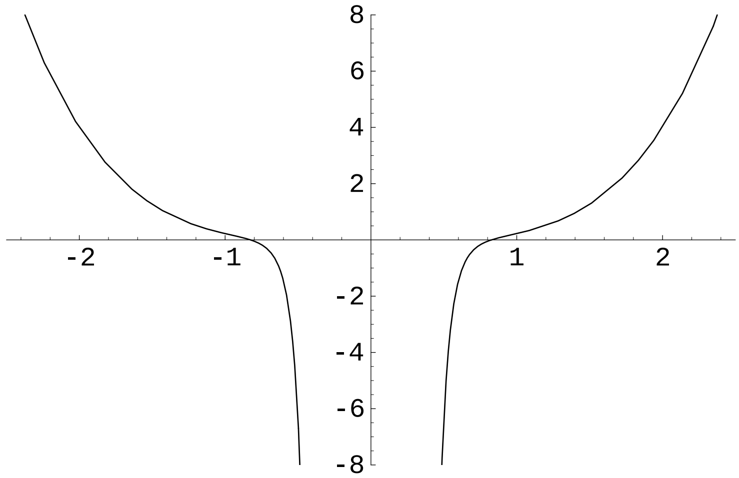

Figura 5. Grafico dell'energia potenziale $V_{\text{eff}}(\rho)$ per $\beta = 0$ e $\alpha > 0$.

Per $\beta = 0$ e $\alpha = 0$ si ha il grafico di Figura 6: l'energia potenziale efficace è definita su tutto l'asse reale ed è convessa (si ha $V''_{\text{eff}}(\rho) > 0$ per ogni $\rho \neq 0$ e $V''_{\text{eff}}(0) = 0$).

Per $\beta = 0$ e $\alpha < 0$ si ha il grafico di Figura 7: l'energia potenziale efficace è definita su tutto l'asse reale e diverge a $+\infty$ per$\rho \to 0$. Inoltre la funzione è strettamente convessa.

4.5. Analisi qualitativa. Studiamo le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (\rho, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : H(\rho, y) := \frac{1}{2}\mu y^2 + V_{\text{eff}}(\rho) = E \right\}$$

dell'energia del sistema.

Per $\beta > 0$ e $\alpha > \beta^2/4$ si ha la situazione rappresentata in Figura 8, per $\beta > 0$ e $\alpha = \beta^2/4$ si ha la situazione rappresentata in Figura 9, per $\beta > 0$ e $0 < \alpha < \beta^2/4$ si ha la situazione rappresentata in Figura 10, mentre per $\beta > 0$ e $\alpha \leq 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 11.

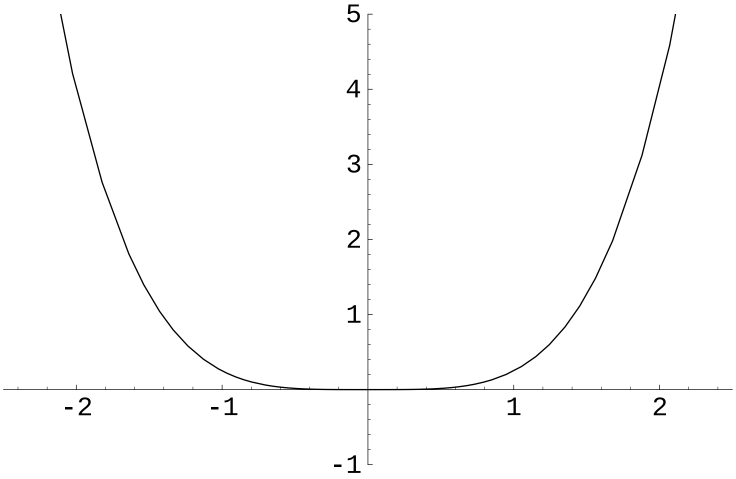

Figura 6. Grafico dell'energia potenziale $V_{\text{eff}}(\rho)$ per $\beta = 0$ e $\alpha = 0$.

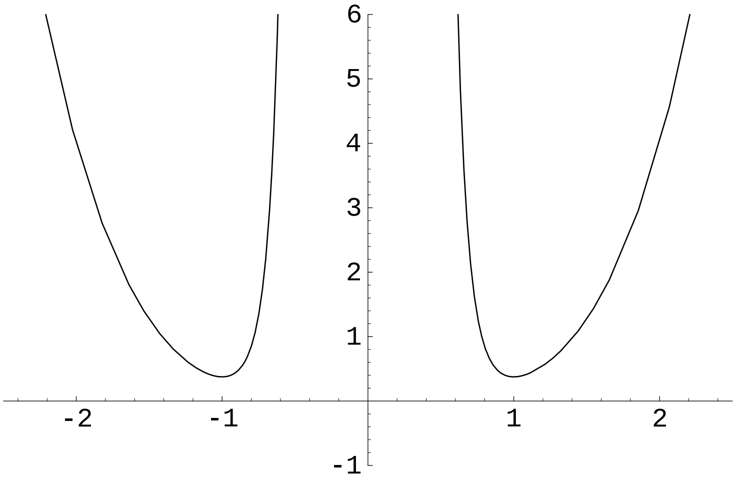

Figura 7. Grafico dell'energia potenziale $V_{\text{eff}}(\rho)$ per $\beta = 0$ e $\alpha < 0$.

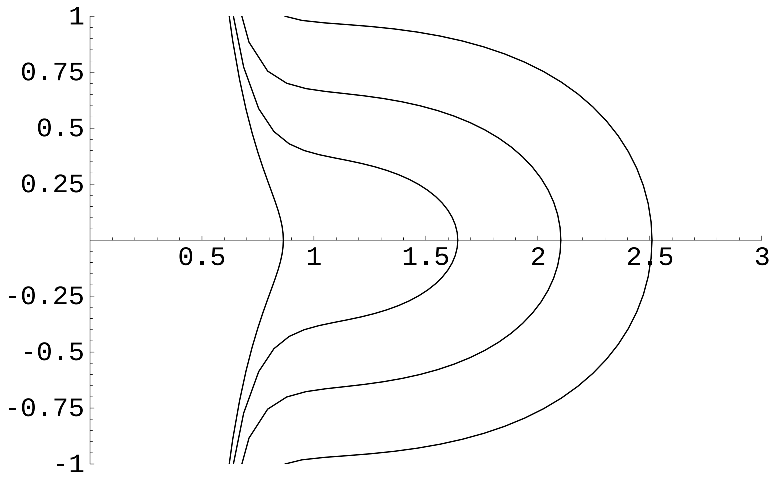

Figura 8. Piano delle fasi $(\rho, y) = (\rho, \dot{\rho})$ per $\beta > 0$ e $\alpha > \beta^2/4$.

Per $\beta = 0$ e $\alpha > 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 12, per $\beta = 0$ e $\alpha = 0$ si ha la situazione

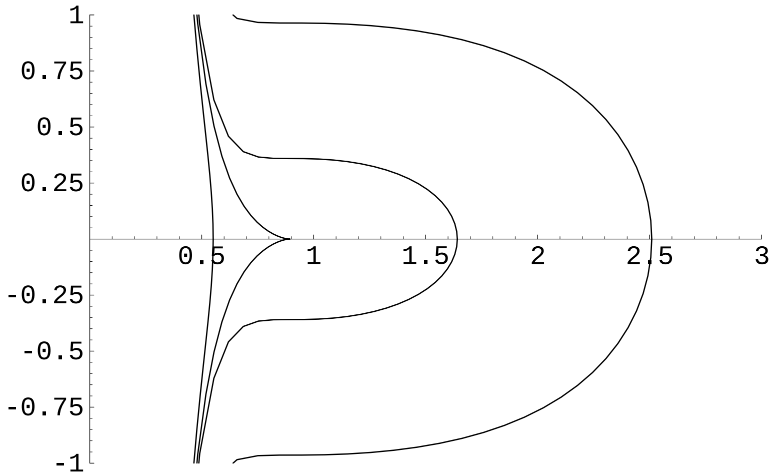

Figura 9. Piano delle fasi $(\rho, y) = (\rho, \dot{\rho})$ per $\beta > 0$ e $\alpha = \beta^2/4$.

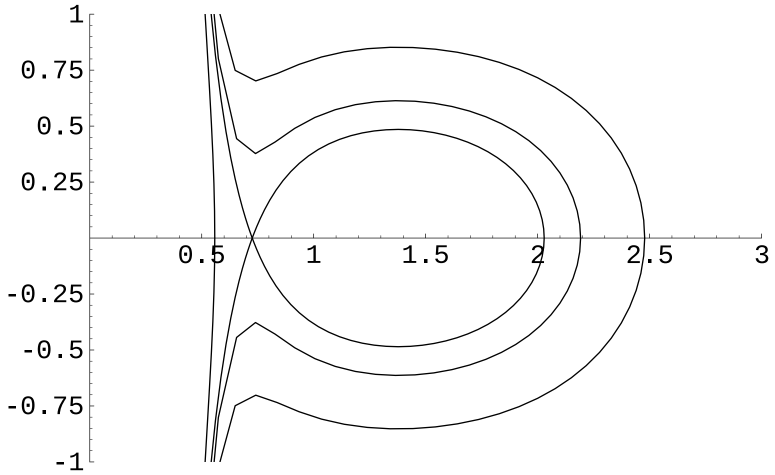

Figura 10. Piano delle fasi $(\rho, y) = (\rho, \dot{\rho})$ per $\beta > 0$ e $0 < \alpha < \beta^2/4$.

rappresentata in Figura 13, mentre per $\beta = 0$ e $\alpha < 0$ si ha la situazione rappresentata in Figura 14.

4.6. Traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$**.** Si possono avere traiettorie periodiche solo per $\beta > 0$ e $\alpha < \beta^2/4$ e per $\beta = 0$ e $\alpha \leq 0$.

I dati iniziali $(\bar{\rho}, \bar{y})$ si devono scegliere nei rispettivi casi come segue. Se $\beta > 0$ e $0 < \alpha < \beta^2/4$ si deve avere $\bar{\rho} > \rho_1$ e $V_{\text{eff}}(\rho_2) < H(\bar{\rho}, \bar{y}) < V_{\text{eff}}(\rho_1)$. Se $\beta > 0$ e $\alpha \leq 0$ si deve avere $H(\bar{\rho}, \bar{y}) > V_{\text{eff}}(\rho_0)$ (ovvero $(\bar{\rho}, \bar{y}) \in \mathbb{R}_+ \in \mathbb{R} \setminus \{(\rho_0, 0)\}$). Se $\beta = 0$ e $\alpha = 0$ si deve avere $(\bar{\rho}, \bar{y}) \neq (0, 0)$. Se infine $\beta = 0$ e $\alpha > 0$ si deve avere $\bar{\rho} \neq 0$ e $H(\bar{\rho}, \bar{y}) > V_{\text{eff}}(\rho_0)$, con $\rho_0 = \pm(-\alpha)^{1/12}$.

4.7. Traiettorie periodiche per il moto complessivo. Per avere moti periodici si hanno due possibilità.

La prima è che sia $(\rho(0), \dot{\rho}(0)) = (\rho_0, 0)$, con $V'_{\text{eff}}(\rho_0) = 0$, ovvero che la varabile radiale sia ferma nel suo punto d'equilibrio: in tal caso risulta $\dot{\theta} = L/\mu\rho_0^2$, e quindi il punto materiale si muove lungo un'orbita circolare con velocità angolare costante (e quindi si muove di moto circolare uniforme).

La seconda è che $(\rho(0), \dot{\rho}(0)) = (\bar{\rho}, \bar{y})$, in modo tale che le condizioni al punto 4.6 per avere un moto periodico per la variabile ρ siano soddisfatte, e che l'incremento $\Delta\theta$ della variabile angolare θ in un periodo T_0 della variabile radiale sia commensurabile con 2π.

Si ha la prima situazione per $\beta > 0$ e $\alpha = \beta^2/4$ se $\rho(0) = (\beta/2)^{1/16}$, $\beta > 0$ e $0 < \alpha < \beta^2/4$ se $\rho(0) = \rho_1$

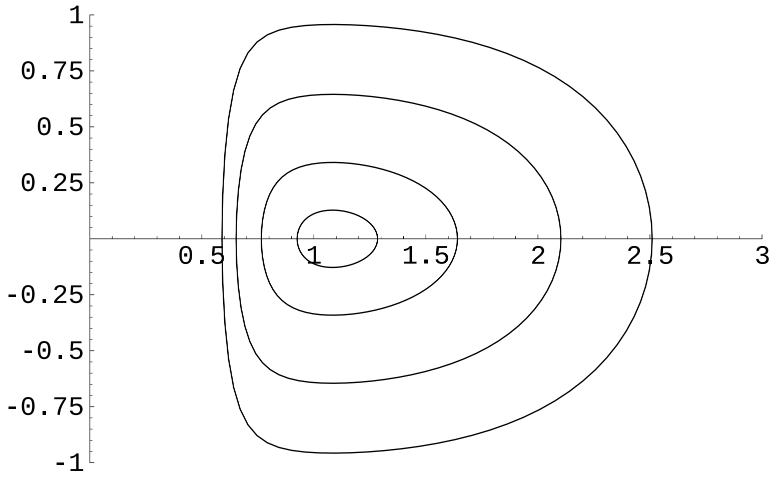

Figura 11. Piano delle fasi $(\rho, y) = (\rho, \dot{\rho})$ per $\beta > 0$ e $\alpha \leq 0$.

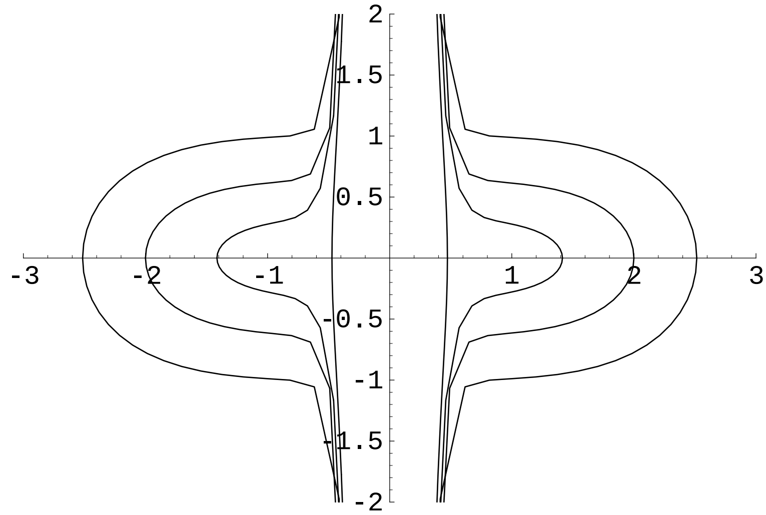

Figura 12. Piano delle fasi $(\rho, y) = (\rho, \dot{\rho})$ per $\beta = 0$ e $\alpha > 0$.

oppure $\rho(0) = \rho_2$, per $\beta > 0$ e $\alpha \leq 0$ per $\rho(0) = \rho_0$, per $\beta = 0$ e $\alpha = 0$ se $\rho(0) = 0$, e per $\beta = 0$ e $\alpha > 0$ se $\rho(0) = \pm(3\alpha)^{1/12}$.

La seconda situazione si ha se il dato iniziale è scelto in accordo con quanto discusso al punto 4.6 e

$$\Delta\theta := 2 \int_{\rho_-(E)}^{\rho_+(E)} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2 \sqrt{\dfrac{2\mu}{L^2}\left(E - V_{\text{eff}}(\rho)\right)}} = 2\pi \frac{p}{q}$$

per $p, q \in \mathbb{N}$ primi tra loro, dove $\rho_\pm(E)$ sono le due radici dell'equazione $V_{\text{eff}}(\rho) = E$.

<u>Esercizio 5.</u> Cfr. Cap. 8, paragrafi 33.14 ÷ 33.17.

<u>Esercizio 6.</u> Cfr. Cap. 4, paragrafi 16.2, 16.7 e 16.8 e Cap. 5, paragrafi 20.14÷20.17.

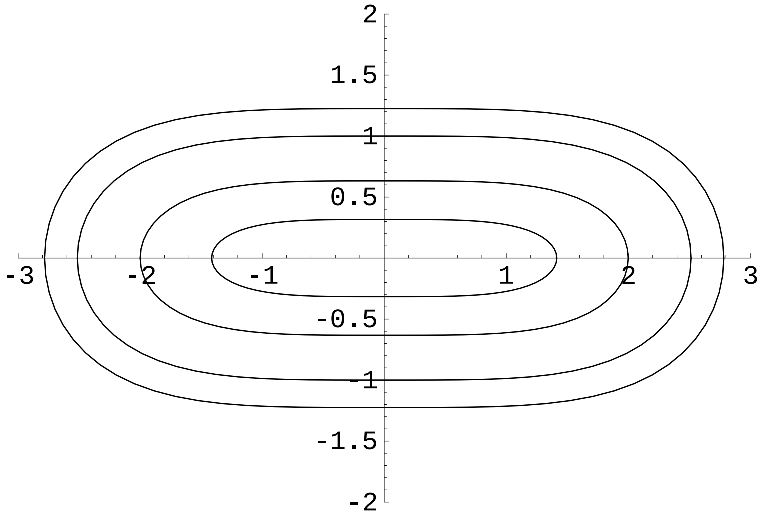

Figura 13. Piano delle fasi $(\rho, y) = (\rho, \dot{\rho})$ per $\beta = 0$ e $\alpha = 0$.

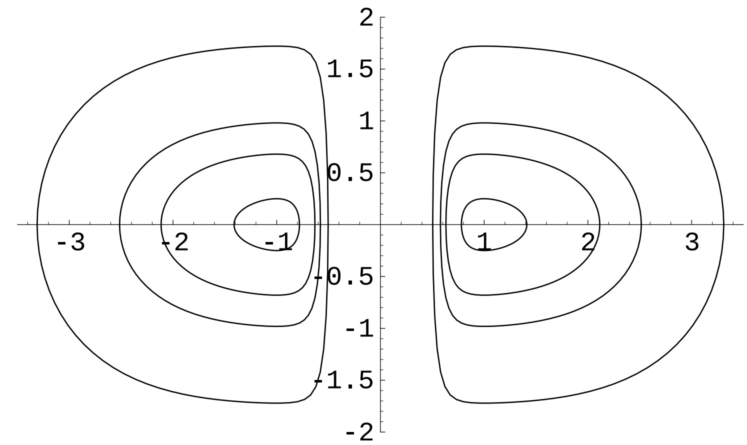

Figura 14. Piano delle fasi $(\rho, y) = (\rho, \dot{\rho})$ per $\beta = 0$ e $\alpha < 0$.