Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (16-07-2007)

<u>Esercizio 1.</u> [4] Si consideri un sistema di riferimento che ruoti con velocità angolare costante rispetto a un sistema di riferimento fisso. Si dimostri che un osservatore che sia fermo nel sistema di riferimento mobile risente della sola forza centrifuga. È possibile che non risenta di alcuna forza apparente?

<u>Esercizio 2.</u> [7] Enunciare e dimostrare il teorema di Ljapunov sulla stabilità dei punti d'equilibrio.

<u>Esercizio 3.</u> [8] Si consideri la funzione $H(x,y) = x^2 + y^4$. Si considerino i due sistemi dinamici (A) $\dot{z} = f(z)$ e (B) $\dot{z} = g(z)$, dove $z = (x,y)$ e

$$f(x,y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right), \qquad g(x,y) = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right).$$

(3.1) Si dimostri che l'origine è un punto d'equilibrio stabile per il sistema (A).
(3.2) L'origine può essere un punto d'equilibrio asintoticamente stabile per il sistema (A)?
(3.3) Si dimostri che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile per il sistema (B).
(3.4) Si dia una stima del bacino d'attrazione dell'origine per il sistema (B).

<u>Esercizio 4.</u> [8] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{\alpha}{2n} x^{2n}.$$

Al variare dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ si risponda alle seguenti domande.
(4.1) Si studi il grafico dell'energia potenziale.
(4.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato.
(4.3) Se ne discuta la stabilità.
(4.4) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
(4.5) In particolare si dimostri che per n fissato, al variare di α, o tutti i dati iniziali che non siano punti d'equilibrio dànno luogo a traiettorie periodiche o non esistono traiettorie periodiche. Nel primo caso si scriva il periodo T come integrale definito.
(4.6) Si espliciti la dipendenza dall'energia E del periodo trovato al punto precedente.
(4.7) Si dica per quale valore di n il periodo T non dipende da E, e calcolarlo esplicitamente.
(4.8) Si scriva un'equazione differenziale $\mathrm{d}T/\mathrm{d}E = f(T)$ per la funzione $T = T(E)$.

<u>Esercizio 5.</u> [3] Dato il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ e un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, si definisca l'insieme ω-limite di $\bar{x}$, e si dimostri che è un insieme invariante.

<u>Esercizio 6.</u> [4] Determinare gli assi d'inerzia e calcolare i momenti principali d'inerzia di un cilindro circolare retto omogeneo di raggio R, altezza h e massa m.