

ESERCIZIO 1. [8] Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + z, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = y + z, \end{cases}$$

e se ne calcoli la soluzione con dato iniziale $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.

ESERCIZIO 2. [5] Dati uno spazio vettoriale E , un insieme aperto $W \subset E$ e un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, con $f \in C^1(W, E)$, si definisca la nozione di punto di equilibrio per il sistema. Si dia inoltre la definizione di punto d'equilibrio stabile, punto d'equilibrio instabile, punto d'equilibrio attrattivo e punto d'equilibrio asintoticamente stabile, e si fornisca un esempio per ciascuno di essi.

ESERCIZIO 3. [8] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x - 1), \\ \dot{y} = -y^2 + x^2(4x - 3), \end{cases}$$

(3.1) Si trovi una costante del moto $H(x, y)$ per il sistema tale che $H(0, 0) = 0$.

(3.2) Si determinino i punti d'equilibrio.

(3.3) Se ne discuta la stabilità.

(3.4) Si studi analiticamente la curva di livello $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = 0\}$ e si determini il verso di percorrenza delle traiettorie corrispondenti.

(3.5) Si studino qualitativamente le altre curve di livello e si determini il verso di percorrenza delle traiettorie.

(3.6) Si dia un'espressione analitica della regione dei dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 4. [5] Si discuta in generale il moto di un sistema di riferimento mobile rispetto a un sistema di riferimento fisso, e si determini la legge di trasformazione delle velocità. In particolare si mostri che la velocità nel sistema di riferimento fisso (velocità assoluta) si può scrivere come somma di più contributi, e si interpreti fisicamente ciascun contributo.

ESERCIZIO 5. [5] Le tre leggi di Keplero: (5.1) enunciarle, (5.2) dimostrarne la seconda e (5.3) mostrare come la seconda implichi la terza.

ESERCIZIO 6. [5] Sistemi rigidi: darne la definizione e discuterne in dettaglio il numero di gradi di libertà.