

# Esercizi per il corso di Sistemi Dinamici 1<sup>o</sup> modulo.

E.N.M. Cirillo – Anno Accademico 2000–2001.

<b>1. Sistemi di equazioni differenziali lineari.</b>	<b>1</b>
Esercizio 1.1 . . . . .	2
Esercizio 1.2 . . . . .	4
Esercizio 1.3 . . . . .	5
Esercizio 1.4 . . . . .	6
Esercizio 1.5 . . . . .	7
Esercizio 1.6 . . . . .	8
Esercizio 1.7 (Moto armonico semplice) . . . . .	9
Esercizio 1.8 (Moto armonico smorzato) . . . . .	11
Esercizio 1.9 (Grave in un fluido viscoso) . . . . .	14
Esercizio 1.10 (Moto armonico forzato) . . . . .	15
<b>2. Equazioni differenziali a variabili separabili.</b>	<b>16</b>
Esercizio 2.1 . . . . .	16
Esercizio 2.2 . . . . .	16
<b>3. Sistemi dinamici planari e moti unidimensionali.</b>	<b>17</b>
Esercizio 3.1 (Moto armonico semplice) . . . . .	17
Esercizio 3.2 (Potenziale quartico) . . . . .	19
Esercizio 3.3 . . . . .	21
Esercizio 3.4 (Pendolo rotante) . . . . .	24
Esercizio 3.5 . . . . .	28
Esercizio 3.6 . . . . .	32
Esercizio 3.7 . . . . .	33
Esercizio 3.8 . . . . .	34
<b>4. Moti centrali.</b>	<b>35</b>
Esercizio 4.1 . . . . .	35
Esercizio 4.2 . . . . .	38
<b>Bibliografia</b>	<b>39</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>39</b>

## 1. Sistemi di equazioni differenziali lineari.

Sia  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $A$  una matrice reale  $n \times n$ . Si considera il sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\dot{x} = Ax \quad \text{tale che} \quad x(0) = x^0, \quad (1.1)$$

con  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . La soluzione del sistema (1.1) è nella forma

$$x(t) = \exp\{At\}x^0. \quad (1.2)$$

Se  $B(t)$  è un vettore continuo di  $\mathbb{R}^2$ , allora l'unica soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari non omogenee del primo ordine  $\dot{x} = Ax + B$ , con condizione iniziale  $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2$ , è nella forma

$$x(t) = e^{At} \left[ x^0 + \int_0^t ds e^{-As} B(s) \right]. \quad (1.3)$$

Il problema è ridotto a determinare l'esponenziale  $\exp\{A\}$  della matrice  $A$ . Ingredienti e notazione:

- siano  $e := \{e_i, i = 1, \dots, n\}$  e  $f := \{f_i, i = 1, \dots, n\}$  due basi dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $P$  la matrice del cambiamento di base, ovvero  $f_i = \sum_{j=1}^n P_{ij}e_j$ . Allora la matrice  $Q$  per il cambiamento di coordinate è  $Q = (P^T)^{-1}$ .

- Sia  $A_e$  la matrice associata ad un certo operatore lineare  $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  nella base  $e$ . Allora  $A_f = QA_eQ^{-1}$  è la matrice associata a  $T$  nella base  $f$ .
- Sia  $A := \{\lambda_i \delta_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$  una matrice in forma diagonale. Allora  $\exp\{A\} = \{\exp\{\lambda_i\} \delta_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$ .
- Sia  $A$  una matrice  $2 \times 2$ , siano  $a, b \in \mathbb{R}$ , allora:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \implies \exp\{A\} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos a \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

- Per la matrice identità si userà la notazione  $\mathbb{I} := \{\delta_{i,j}, i, j = 1, \dots, n\}$ .
- La base canonica dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  verrà denotata con  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ . Ovvero,  $e_1 := (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n := (0, 0, \dots, 1)$ .

**Esercizio 1.1 (8.1 in [1])** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , con dato iniziale  $x^0 = (-1, \sqrt{2})$  e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione 1.1 (primo metodo): in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (1 - \lambda)^2 + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 9 = 0 \quad ,$$

da cui si ottengono i due autovalori complessi coniugati

$$\lambda_1 = 1 + 2i\sqrt{2} \quad \lambda_2 = 1 - 2i\sqrt{2} \quad .$$

La matrice è semisemplice, quindi è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1)y_{1,1} - 2y_{1,2} = 0 \\ 4y_{1,1} + (1 - \lambda_1)y_{1,2} = 0 \end{cases} \implies y_{1,2} = (1 - \lambda_1)y_{1,1}/2 = -i\sqrt{2}y_{1,1} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad .$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (1, +i\sqrt{2})$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} \\ 1 & +i\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad .$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{2} & +i\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = 2i\sqrt{2}$$

pertanto

$$Q = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & -1 \\ i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Utilizzando la relazione  $A_y = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - 2i\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad .$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

- scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & -1 \\ i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} + \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + i \\ -1 - i \end{pmatrix} \quad .$$

- Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^{(1+2i\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i\sqrt{2})t} \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{(1+2i\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i \\ -1-i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1+i)e^{(1+2i\sqrt{2})t} \\ (-1-i)e^{(1-2i\sqrt{2})t} \end{pmatrix} .$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$\begin{aligned} x(t) = Q^{-1}y(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1+i)e^{(1+2i\sqrt{2})t} - (1+i)e^{(1-2i\sqrt{2})t} \\ -i\sqrt{2}(-1+i)e^{(1+2i\sqrt{2})t} - i\sqrt{2}(1+i)e^{(1-2i\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^t(\cos 2\sqrt{2}t + \sin 2\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2}e^t(\sin 2\sqrt{2}t - \cos 2\sqrt{2}t) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (-1, \sqrt{2})$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

Soluzione 1.1 (secondo metodo): considero la base  $f := \{f_1, f_2\}$  con

$$f_1 := \frac{y_1 - y_2}{2i} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad f_2 := \frac{y_1 + y_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $f_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij} e_j$ ; si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = \sqrt{2}$$

pertanto

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando la relazione  $A_f = Q A Q^{-1}$  si può verificare che  $A_f$  è nella forma

$$A_f = Q A Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base  $\{f_1, f_2\}$ :

- scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Q x^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_f t\}$  usando la (1.4):

$$e^{A_f t} = e^t \begin{pmatrix} \cos(2\sqrt{2}t) & -\sin(2\sqrt{2}t) \\ \sin(2\sqrt{2}t) & \cos(2\sqrt{2}t) \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_f t\} y^0 = e^t \begin{pmatrix} \cos(2\sqrt{2}t) & -\sin(2\sqrt{2}t) \\ \sin(2\sqrt{2}t) & \cos(2\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\cos(2\sqrt{2}t) + \sin(2\sqrt{2}t) \\ -\sin(2\sqrt{2}t) - \cos(2\sqrt{2}t) \end{pmatrix} .$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(2\sqrt{2}t) + \sin(2\sqrt{2}t) \\ -\sin(2\sqrt{2}t) - \cos(2\sqrt{2}t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\cos(2\sqrt{2}t) - \sin(2\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}[-\sin(2\sqrt{2}t) + \cos(2\sqrt{2}t)] \end{pmatrix} .$$

**Esercizio 1.2 (8.1 in [1])** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , con dato iniziale  $x^0 = (-1, \sqrt{2})$  e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione 1.2: in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (1 - \lambda)^2 - 8 = \lambda^2 - 2\lambda - 7 = 0 ,$$

da cui si ottengono i due autovalori reali e distinti

$$\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{2} \quad \lambda_2 = 1 - 2\sqrt{2} .$$

La matrice è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1)y_{1,1} + 2y_{1,2} = 0 \\ 4y_{1,1} + (1 - \lambda_1)y_{1,2} = 0 \end{cases} \implies y_{1,2} = -(1 - \lambda_1)y_{1,1}/2 = \sqrt{2}y_{1,1} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (1, -\sqrt{2})$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -2\sqrt{2}$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando la relazione  $A_y = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

- scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^{(1+2\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2\sqrt{2})t} \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\}y^0 = \begin{pmatrix} e^{(1+2\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2\sqrt{2})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{(1-2\sqrt{2})t} \end{pmatrix} .$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{(1-2\sqrt{2})t} \end{pmatrix} = e^{(1-2\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (-1, \sqrt{2})$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

**Esercizio 1.3 (8.2 in [1])** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , con dato iniziale  $x^0 = (1, 0, 0)$  e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione 1.3: in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \implies -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) = 0 ,$$

da cui si ottengono i tre autovalori reali e distinti

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1 .$$

La matrice è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1, y_2$  e  $y_3$ :

$$\begin{cases} -y_{1,1} = 0 \\ y_{1,1} - 3y_{1,3} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_{1,1} = 0 \\ y_{1,3} = 0 \end{cases} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (2, -2, 1)$  e  $y_3 = (0, 0, 1)$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2, y_3\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^3 P_{ij}e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -2$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando la relazione  $A_y = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

- scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix} .$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1} y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^t \\ -2e^t + 2e^{2t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix} .$$

Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (1, 0, 0)$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

**Esercizio 1.4 (8.3 in [1])** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , con dato iniziale  $x^0 = (1, 0, 0)$  e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione 1.4: in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (1 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0 ,$$

da cui si ottengono i tre autovalori reali e distinti

$$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1 .$$

La matrice è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1, y_2$  e  $y_3$ :

$$\begin{cases} -4y_{1,1} & = 0 \\ -3y_{1,2} + 3y_{1,3} & = 0 \\ y_{1,1} + 3y_{1,2} - 3y_{1,3} & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y_{1,1} & = 0 \\ y_{1,2} & = y_{1,3} \end{cases} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (8, -3, 1)$  e  $y_3 = (0, -1, 1)$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2, y_3\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^3 P_{ij} e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -16$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -8 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la relazione  $A_y = Q A Q^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = Q A Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

- scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^t \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} .$$

Conclusion: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondirmi alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8e^t \\ e^{5t} - 3e^t + 2e^{-t} \\ e^{5t} + e^t - 2e^{-t} \end{pmatrix} .$$

Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (1, 0, 0)$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

**Esercizio 1.5 (8.4 in [1])** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , con dato iniziale  $x^0 = (a_1, a_2, a_3)$  e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione 1.5: Risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (2 - \lambda)^3 = 0 ,$$

da cui si ottengono i tre autovalori reali e coincidenti  $\lambda_{1,2,3} = 2$ . La matrice  $A$  non è diagonalizzabile, ma si può scrivere  $A = 2\mathbb{I} + \mathcal{N}$  ove

$$\mathcal{N} := A - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice nilpotente di ordine 3. Infatti

$$\mathcal{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Quindi si può scrivere l'esponenziale della matrice  $A$  nel modo seguente:

$$e^{At} = e^{2t\mathbb{I} + \mathcal{N}t} = e^{2t\mathbb{I}} \times e^{\mathcal{N}t} = e^{2t\mathbb{I}} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathcal{N}t)^k = e^{2t\mathbb{I}} \times \left[ \mathbb{I} + \mathcal{N}t + \frac{1}{2} \mathcal{N}^2 t^2 \right] = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t + t^2/2 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} .$$

Infine scrivo la soluzione del sistema:

$$x(t) = e^{At} x^0 = e^{2t} \begin{pmatrix} a_1 + a_2(t + t^2/2) + a_3 t \\ a_2 \\ a_2 t + a_3 \end{pmatrix} .$$

Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

**Esercizio 1.6 (8.6 in [1])** Risolvere il sistema  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , con dato iniziale  $x^0 = (-1, 2)$  e

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione 1.6 (primo metodo): in primo luogo risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies -(3 - \lambda)(1 + \lambda) + 4 = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad ,$$

da cui si ottengono i due autovalori reali e coincidenti  $\lambda_{1,2} = 1$ . Cerco la base  $y := \{y_1, y_2\}$  in cui la matrice  $A$  si riduce alla forma canonica

$$A_y = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

In altri termini cerco la matrice  $2 \times 2$   $Q$  tale che  $A_y = Q A Q^{-1}$ . Allora,

$$\begin{aligned} A_y = Q A Q^{-1} &\implies A_y Q = Q A \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q + \mathbb{I} Q = Q A \stackrel{[\mathbb{I}, Q]=0}{\implies} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q = Q(A - \mathbb{I}) \\ \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} &\implies \begin{cases} a + b = 0 \\ 2(c + d) = a \\ 2(c + d) = -b \end{cases} \implies \begin{cases} b = -a \\ a = 2(c + d) \end{cases} \end{aligned}$$

da cui si ottiene la possibile scelta  $c = 0$ ,  $d = 1$ ,  $a = 2$  e  $b = -2$ . Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base  $y$  individuata dalla matrice per il cambiamento delle coordinate  $Q$  sopra determinata:

- scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Q x^0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

- Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = e^{\mathbb{I}t + \mathcal{N}t} \stackrel{[\mathbb{I}, \mathcal{N}]=0}{=} e^{\mathbb{I}t} e^{\mathcal{N}t} = e^t \mathbb{I} e^{\mathcal{N}t} = e^t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathcal{N}t)^k}{k!} = e^t [\mathbb{I} + \mathcal{N}t] = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

ove si è posto  $\mathcal{N} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e si è osservato che  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{N} = 0$ .

- Scrivo la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e^t \begin{pmatrix} -3 \\ -3t + 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Conclusion: per scrivere la soluzione del sistema di partenza devo ricondurre alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1} y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} 2e^t \begin{pmatrix} -3 \\ -3t + 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -1 - 6t \\ 2 - 6t \end{pmatrix} \quad .$$

Soluzione 1.6 (secondo metodo): osservo che si può scrivere

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathbb{I} + \mathcal{N}$$

ove si è posto  $\mathcal{N} := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ . Si osserva che  $\mathcal{N} \cdot \mathcal{N} = 0$  e  $[\mathbb{I}, \mathcal{N}] = 0$ , allora

$$e^{At} = e^{\mathbb{I}t + \mathcal{N}t} \stackrel{[\mathbb{I}, \mathcal{N}]=0}{=} e^{\mathbb{I}t} e^{\mathcal{N}t} = e^t \mathbb{I} e^{\mathcal{N}t} = e^t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathcal{N}t)^k}{k!} = e^t [\mathbb{I} + \mathcal{N}t] = e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t & -2t \\ 2t & 1 - 2t \end{pmatrix}$$

Quindi si ha che la soluzione è data da

$$x(t) = e^{At} x^0 = e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t & -2t \\ 2t & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -1 - 6t \\ 2 - 6t \end{pmatrix} \quad .$$



**Esercizio 1.7 (Moto armonico semplice)** Risolvere l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive il moto armonico semplice:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad (1.5)$$

con  $\omega \in \mathbb{R}$  e  $\omega > 0$ . Si supponga  $z(0) = a > 0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ .

Soluzione 1.7 (primo metodo): l'equazione (1.5) può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine per mezzo delle nuove variabili  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$ . Infatti

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{z} \\ \dot{x}_2 = \ddot{z} = -\omega^2 z \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \end{cases} .$$

Pertanto ci si è ricondotti ad un sistema nella forma  $\dot{x} = Ax$  con  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A$  la matrice reale  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

e dato iniziale  $x^0 = (a, 0)$ . Risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \implies \lambda^2 + \omega^2 = 0 ,$$

da cui si ottengono i due autovalori complessi coniugati

$$\lambda_1 = +i\omega \quad \lambda_2 = -i\omega .$$

La matrice è semisemplice, quindi è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{cases} -i\omega y_{1,1} + y_{1,2} = 0 \\ -\omega^2 y_{1,1} - i\omega y_{1,2} = 0 \end{cases} \implies y_{1,2} = i\omega y_{1,1} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} .$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (1, -i\omega)$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij} e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & +i\omega \\ 1 & -i\omega \end{pmatrix} .$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -2i\omega$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{2i\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -i\omega \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2i\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando la relazione  $A_y = Q A Q^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = Q A Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} .$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

- scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Q x^0 = \frac{i}{2\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2\omega} \begin{pmatrix} -i\omega a \\ -i\omega a \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} .$$

- Scrivo la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{pmatrix} .$$

Conclusione: per scrivere la soluzione del sistema di partenza devo ricondurmi alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \\ i\omega e^{i\omega t} - i\omega e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ -a\omega \sin \omega t \end{pmatrix} .$$

Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (a, 0)$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza. Commento: la soluzione dell'equazione del moto armonico semplice con dato iniziale  $z(0) = a$  è  $z(t) = a \cos \omega t$ , ovvero la particella compie delle oscillazioni di ampiezza  $a$  e di periodo  $T = 2\pi/\omega$  attorno all'origine.

Soluzione 1.7 (secondo metodo): considero la base  $f := \{f_1, f_2\}$  con

$$f_1 := \frac{y_1 - y_2}{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad f_2 := \frac{y_1 + y_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $f_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ ; si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -\omega$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando la relazione  $A_f = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_f$  è nella forma

$$A_f = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} .$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base  $f = \{f_1, f_2\}$ :

- scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_f t\}$  usando la (1.4):

$$e^{A_f t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_f t\}y^0 = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin \omega t \\ a \cos \omega t \end{pmatrix} .$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondurmi alla base canonica.

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \sin \omega t \\ a \cos \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \omega t \\ -a\omega \sin \omega t \end{pmatrix} .$$

**Esercizio 1.8 (Moto armonico smorzato)** Risolvere l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive il moto armonico smorzato:

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega^2 z = 0 \tag{1.6}$$

con  $\omega, \gamma \in \mathbb{R}$  e  $\gamma, \omega > 0$ . Si supponga  $z(0) = a > 0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ .

Soluzione 1.8: l'equazione (1.6) può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine per mezzo delle nuove variabili  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$ . Infatti

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{z} \\ \dot{x}_2 = \ddot{z} = -\gamma\dot{z} - \omega^2 z \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - \gamma x_2 \end{cases} .$$

Pertanto ci si è ricondotti ad un sistema nella forma  $\dot{x} = Ax$  con  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A$  la matrice reale  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

e dato iniziale  $x^0 = (a, 0)$ . Risolvo il problema agli autovalori per la matrice  $A$  scrivendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0 ,$$

da cui si ottengono i due autovalori

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} .$$

Le caratteristiche degli autovalori dipendono dal discriminante  $\Delta := \gamma^2 - 4\omega^2$ . Bisogna distinguere tre casi:  $\Delta = 0$ ,  $\Delta < 0$  e  $\Delta > 0$ .

*Caso 1:*  $\Delta = 0$ , ovvero  $\gamma = 2\omega$ . In questo caso gli autovalori sono reali e coincidenti  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma/2 = -\omega$ . La matrice  $A$  non è diagonalizzabile, ma si può scrivere  $A = -\omega \mathbb{I} + \mathcal{N}$  ove

$$\mathcal{N} := A + \omega \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix}$$

è una matrice nilpotente di ordine 2. Infatti

$$\mathcal{N}^2 = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Quindi si può scrivere l'esponenziale della matrice  $A$  nel modo seguente:

$$e^{At} = e^{-\omega t \mathbb{I} + \mathcal{N}t} = e^{-\omega t} \mathbb{I} \times e^{\mathcal{N}t} = e^{-\omega t} \mathbb{I} \times [\mathbb{I} + \mathcal{N}t] = e^{-\omega t} \begin{pmatrix} 1 + \omega t & t \\ -\omega^2 t & 1 - \omega t \end{pmatrix} .$$

Infine scrivo la soluzione del sistema:

$$x(t) = e^{At} x^0 = e^{-\omega t} \begin{pmatrix} 1 + \omega t & t \\ -\omega^2 t & 1 - \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a e^{-\omega t} \begin{pmatrix} 1 + \omega t \\ -\omega^2 t \end{pmatrix} .$$

Più esplicitamente:

$$\begin{cases} x_1(t) = a e^{-\omega t} (1 + \omega t) \\ x_2(t) = -a \omega^2 t e^{-\omega t} \end{cases} ,$$

ovvero la particella dalla posizione  $z(0) = a$  si muove asintoticamente verso l'origine  $z(t) \rightarrow \infty$  per  $t \rightarrow \infty$  (*smorzamento critico*). Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (a, 0)$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza.

*Caso 2:*  $\Delta < 0$ , ovvero  $\gamma < 2\omega$ . Pongo  $\delta := \sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}$ , quindi

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + i\delta}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma - i\delta}{2} .$$

Facilmente si ottengono gli autovettori:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ (-\gamma + i\delta)/2 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (-\gamma - i\delta)/2 \end{pmatrix} .$$

Considero la base  $f := \{f_1, f_2\}$  con

$$f_1 := \frac{y_1 - y_2}{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta/2 \end{pmatrix} \quad f_2 := \frac{y_1 + y_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma/2 \end{pmatrix} .$$

Denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $f_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ ; si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \delta/2 \\ 1 & -\gamma/2 \end{pmatrix} .$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta/2 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -\frac{\delta}{2}$$

pertanto

$$Q = -\frac{2}{\delta} \begin{pmatrix} -\gamma/2 & -\delta/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \gamma & 2 \\ \delta & 0 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando la relazione  $A_f = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_f$  è nella forma

$$A_f = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & -\delta/2 \\ \delta/2 & -\gamma/2 \end{pmatrix} .$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base  $f = \{f_1, f_2\}$ :

- scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \gamma & 2 \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{\delta} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_f t\}$  usando la (1.4):

$$e^{A_f t} = e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} \cos(\delta t/2) & -\sin(\delta t/2) \\ \sin(\delta t/2) & \cos(\delta t/2) \end{pmatrix} .$$

- Scrivo esplicitamente la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_f t\} y^0 = e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} \cos(\delta t/2) & -\sin(\delta t/2) \\ \sin(\delta t/2) & \cos(\delta t/2) \end{pmatrix} \frac{a}{\delta} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \frac{a}{\delta} e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} \gamma \cos(\delta t/2) - \delta \sin(\delta t/2) \\ \gamma \sin(\delta t/2) + \delta \cos(\delta t/2) \end{pmatrix}$$

Conclusione: per scrivere esplicitamente la soluzione del sistema di partenza devo ricondormi alla base canonica.

$$\begin{aligned} x(t) &= Q^{-1}y(t) = \frac{a}{\delta} e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta/2 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \cos(\delta t/2) - \delta \sin(\delta t/2) \\ \gamma \sin(\delta t/2) + \delta \cos(\delta t/2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{a}{\delta} e^{-\gamma t/2} \begin{pmatrix} \gamma \sin(\delta t/2) + \delta \cos(\delta t/2) \\ -(\delta^2/2) \sin(\delta t/2) - (\gamma^2/2) \sin(\delta t/2) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Scrivo, infine, la soluzione dell'equazione (1.6):

$$\begin{aligned} z(t) &= x_1(t) = \frac{a}{\delta} e^{-\gamma t/2} \left( \gamma \sin \frac{\delta}{2} t + \delta \cos \frac{\delta}{2} t \right) = \frac{a\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{\delta} e^{-\gamma t/2} \left( \cos \varphi \sin \frac{\delta}{2} t + \sin \varphi \cos \frac{\delta}{2} t \right) \\ &= \frac{a\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{\delta} e^{-\gamma t/2} \sin \left( \frac{\delta}{2} t + \varphi \right) = \frac{2\omega a}{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t/2} \sin \left( \frac{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}}{2} t + \varphi \right) \end{aligned}$$

ove si è posto  $\cos \varphi = \gamma/\sqrt{\delta^2 + \gamma^2}$  e  $\sin \varphi = \delta/\sqrt{\delta^2 + \gamma^2}$ . La particella compie delle oscillazioni di ampiezza esponenzialmente decrescente attorno all'origine: *oscillazioni smorzate*.

*Caso 3:*  $\Delta < 0$ , ovvero  $\gamma > 2\omega$ . In questo caso gli autovalori sono reali e distinti, quindi la matrice è diagonalizzabile. Gli autovalori diventano

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} .$$

Determino gli autovettori  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{cases} -\lambda_1 y_{1,1} + y_{1,2} & = 0 \\ -\omega^2 y_{1,1} - (\gamma + \lambda_1) y_{1,2} & = 0 \end{cases} \implies y_{1,2} = \lambda_1 y_{1,1} \implies y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix} .$$

Analogamente si ottiene:  $y_2 = (1, (-\gamma - \sqrt{\Delta})/2)$ . Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} \\ 1 & \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix}.$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} & \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} - \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} = -\sqrt{\Delta}$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} & \frac{\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} & -1 \\ \frac{\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando la relazione  $A_y = Q A Q^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = Q A Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalmente posso scrivere la soluzione del sistema nella base degli autovettori:

- scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Q x^0 = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} & -1 \\ \frac{\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \\ \frac{\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix}$$

- Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} \exp\{\frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} t\} & 0 \\ 0 & \exp\{\frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} t\} \end{pmatrix}.$$

- Scrivo la soluzione nella nuova base:

$$\begin{aligned} y(t) = \exp\{A_y t\} y^0 &= -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \exp\{\frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} t\} & 0 \\ 0 & \exp\{\frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} t\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \\ \frac{\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \exp\{\frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} t\} \\ \frac{\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \exp\{\frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} t\} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusione: per scrivere la soluzione del sistema di partenza devo ricondirmi alla base canonica.

$$\begin{aligned} x(t) = Q^{-1} y(t) &= -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} & \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \exp\{\frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} t\} \\ \frac{\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} \exp\{\frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} t\} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{a}{2\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} -(\gamma + \sqrt{\Delta}) \exp\{\frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} t\} + (\gamma - \sqrt{\Delta}) \exp\{\frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} t\} \\ \frac{\gamma^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{2} \exp\{\frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} t\} - \frac{\gamma^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{2} \exp\{\frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2} t\} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si nota che  $(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$  se  $\Delta > 0$ , mentre  $(\sqrt{\Delta})^2 = -|\Delta|$  se  $\Delta < 0$ . Possibili verifiche: verificare che  $x(0) = (a, 0)$ . Verificare che il vettore  $x(t)$  soddisfa il sistema di partenza. Commento: la soluzione dell'equazione del moto armonico smorzato, nel caso  $\Delta = \gamma^2 - 4\omega^2 > 0$ , con dato iniziale  $z(0) = a$  è

$$z(t) = \frac{a}{2\sqrt{\Delta}} \left[ (\gamma + \sqrt{\Delta}) \exp\left\{\frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2}t\right\} - (\gamma - \sqrt{\Delta}) \exp\left\{\frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2}t\right\} \right] .$$

Poiché  $\gamma > \sqrt{\Delta}$  entrambi gli esponenziali sono decrescenti. Quindi la particella, inizialmente in  $a$ , si muove asintoticamente verso l'origine. Nel caso  $\Delta < 0$  si possono ritrovare i risultati del Caso 2:

$$\begin{aligned} z(t) &= -\frac{a}{2i\sqrt{|\Delta|}} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ -(\gamma + i\sqrt{|\Delta|}) \exp\left\{i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t\right\} + (\gamma - i\sqrt{|\Delta|}) \exp\left\{-i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}t\right\} \right] \\ &= \dots \text{ un po' di algebra } \dots = \frac{2a\omega}{\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin\left(\frac{\delta t}{2} + \varphi\right) \end{aligned}$$

dove  $\delta := \sqrt{|\Delta|}$  e  $\varphi$  è tale che  $\sin \varphi = \delta/\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$  e  $\cos \varphi = \gamma/\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$ .

**Esercizio 1.9 (Grave in un fluido viscoso)** Risolvere l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive la caduta di un grave immerso in un fluido viscoso:

$$m\ddot{z} = -bz + mg \implies \ddot{z} + \gamma\dot{z} = g \quad \text{con } \gamma, \omega > 0, \quad (1.7)$$

con condizioni iniziali  $z(0) = a > 0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ .

Soluzione 1.9: l'equazione (1.7) può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine per mezzo delle nuove variabili  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$ . Infatti

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{z} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{z} = -\gamma x_2 + g \end{cases} \implies \dot{x} = Ax + B \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} .$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice  $A$ :

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\gamma - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + \gamma) = 0 \implies \lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\gamma .$$

La matrice è diagonalizzabile nella base degli autovettori. Determino gli autovettori  $y_1$  e  $y_2$ . Facilmente si ottiene:

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma \end{pmatrix} .$$

Considero la base degli autovettori  $y := \{y_1, y_2\}$ , denoto con  $P$  la matrice per il cambiamento di base  $y_i = \sum_{j=1}^2 P_{ij}e_j$ . Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix} .$$

Determino la matrice per il cambiamento di coordinate  $Q = (P^T)^{-1}$ :

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad \det(P^T) = -\gamma$$

pertanto

$$Q = -\frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Utilizzando la relazione  $A_y = QAQ^{-1}$  si può verificare che  $A_y$  è in forma diagonale. Ovvero

$$A_y = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} .$$

Riscrivo il sistema nella base degli autovettori:

$$\dot{x} = Ax + B \implies Q\dot{x} = QAQ^{-1}Qx + QB \implies \dot{y} = A_y y + B_y$$

ove si è posto  $y = Qx$  e  $B_y = QB = g/\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . L'equazione precedente ammette la soluzione (1.3): scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Scrivo esplicitamente l'esponenziale  $\exp\{A_y t\}$ :

$$e^{A_y t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix} .$$

Infine la soluzione nella nuova base:

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\{A_y t\} \left[ y^0 + \int_0^t ds e^{-A_y s} B_y(s) \right] = \exp\{A_y t\} \left[ y^0 + \frac{g}{\gamma} \int_0^t ds \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\gamma s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp\{A_y t\} \left[ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{g}{\gamma} \begin{pmatrix} t \\ (1/\gamma)[e^{\gamma s}]_0^t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a + gt/\gamma \\ (g/\gamma^2)(e^{\gamma t} - 1) \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

ove si è usato  $-A_y s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma s \end{pmatrix}$ . Scrivo esplicitamente la soluzione nella base canonica:

$$x(t) = Q^{-1}y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + gt/\gamma \\ (g/\gamma^2)(e^{\gamma t} - 1) \end{pmatrix}$$

da cui si ottengono le leggi orarie per la caduta della particella nel fluido viscoso:

$$\begin{aligned} z(t) &= a + \frac{g}{a}t + \frac{g}{\gamma^2}(e^{-\gamma t} - 1) \\ \dot{z}(t) &= \frac{g}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \end{aligned}$$

A tempi lunghi la particella cade con velocità uniforme  $g/\gamma$ .

**Esercizio 1.10 (Moto armonico forzato)** Risolvere l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive le oscillazioni di un corpo sottoposto all'azione di una forza esterna oscillante:

$$m\ddot{z} = -k_1 z + k_2 \sin \Omega t \implies \ddot{z} + \omega^2 z = F \sin \Omega t \quad \text{con } \omega, \Omega > 0, \quad (1.8)$$

con condizioni iniziali  $z(0) = a > 0$  e  $\dot{z}(0) = 0$ .

Soluzione 1.10: l'equazione (1.8) può essere scritta come un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine per mezzo delle nuove variabili  $x_1 := z$  e  $x_2 := \dot{z}$ . Infatti

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{z} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{z} = -\omega^2 x_1 + F \sin \Omega t \end{cases} \implies \dot{x} = Ax + B(t) \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ F \sin \Omega t \end{pmatrix} .$$

Riscrivo il sistema nella base  $f := \{f_1, f_2\}$  ottenuta nell'Esercizio 1.7:

$$\dot{x} = Ax + B(t) \implies Q\dot{x} = QAQ^{-1}Qx + QB(t) \implies \dot{y} = A_f y + B_f(t)$$

ove si è posto  $y = Qx$  e  $B_f(t) = QB(t) = (F/\omega) \sin \Omega t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . L'equazione precedente ammette la soluzione (1.3): scrivo il dato iniziale nella nuova base:

$$y^0 := Qx^0 = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} .$$

Scrivo esplicitamente gli esponenziali  $\exp\{A_f t\}$  e  $\exp\{-A_f t\}$  (uso l'equazione (1.4)):

$$e^{A_f t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad e^{-A_f t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} ,$$

si osservi, a margine, che  $e^{A_f t} e^{-A_f t} = \mathbb{I}$ . Infine la soluzione nella nuova base:

$$y(t) = \exp\{A_f t\} \left[ y^0 + \int_0^t ds e^{-A_f s} B_f(s) \right] ;$$

calcolo il secondo addendo:

$$\begin{aligned} \int_0^t ds e^{-A_f s} B_f(s) &= \frac{F}{\omega} \int_0^t ds \sin \Omega s \begin{pmatrix} \cos \omega s & \sin \omega s \\ -\sin \omega s & \cos \omega s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{F}{\omega} \int_0^t ds \sin \Omega s \begin{pmatrix} \cos \omega s \\ -\sin \omega s \end{pmatrix} \\ &= \frac{F}{2\omega} \int_0^t ds \begin{pmatrix} \sin(\Omega + \omega)t + \sin(\Omega - \omega)t \\ \cos(\Omega + \omega)t - \cos(\Omega - \omega)t \end{pmatrix} = \frac{F}{2\omega} \begin{pmatrix} \frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} - \frac{1}{\Omega + \omega} \cos(\Omega + \omega)t - \frac{1}{\Omega - \omega} \cos(\Omega - \omega)t \\ \frac{1}{\Omega + \omega} \sin(\Omega + \omega)t - \frac{1}{\Omega - \omega} \sin(\Omega - \omega)t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avendo usato nella terza uguaglianza le fomule di prostaferesi. Con un po' di algebra si scrive dapprima la soluzione nella base  $f = \{f_1, f_2\}$ :

$$y(t) = \begin{pmatrix} -a \sin \omega t \\ a \cos \omega t \end{pmatrix} + \frac{F}{2\omega} \begin{pmatrix} \frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \Omega t \\ \frac{2\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{2\omega}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \Omega t \end{pmatrix}$$

e infine la soluzione nella base canonica

$$x(t) = Q^{-1} y(t) = \begin{pmatrix} a \cos \omega t + F \frac{\Omega/\omega}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{F}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \Omega t \\ -a \omega \sin \omega t + \frac{F\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \omega t - \frac{F\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \Omega t \end{pmatrix} .$$

## 2. Equazioni differenziali a variabili separabili.

Si consideri un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine  $\dot{x} = f(x, t)$  con  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si consideri il problema di Cauchy

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \text{con} \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{R} . \quad (2.1)$$

Se la funzione  $f(x, t)$  è nella forma  $f(x, t) = g(x)h(t)$  allora l'equazione è a variabili separabili e la soluzione del problema (2.1) si determina con un'integrazione ordinaria:

$$\int_{x^0}^{x(t)} \frac{dx}{g(x)} = \int_0^t h(t') dt' . \quad (2.2)$$

**Esercizio 2.1** Si risolva il problema  $\dot{x} = x$  con dato iniziale  $x(0) = 1$ .

Soluzione 2.1: la funzione  $f(x, t) = x$  è di classe  $C^1$ , quindi è Lipschitziana, pertanto il problema ammette una soluzione unica. L'equazione è a variabili separabili con  $g(x) = x$  e  $h(t) = 1$ . Pertanto

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} = \int dt' &\implies \log |x(t)| = t + \text{cost} \implies |x(t)| = e^{\text{cost}} e^t = C e^t \quad \text{con} \quad C > 0 \\ &\implies x(t) = C e^t \quad \text{con} \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Imponendo  $x(0) = 1$  si ottiene  $C = 1$ . E quindi  $x(t) = \exp\{t\}$ .

**Esercizio 2.2** Si risolva l'equazione  $\dot{x} = (t + x)^2$ .

Soluzione 2.2: la funzione  $f(x, t) = (t + x)^2$  non è nella forma  $f(x, t) = g(x)h(t)$ , ciononostante con un opportuno cambiamento di variabili l'equazione può essere scritta in forma separabile. Si pone  $y(t) = x(t) + t$ . Derivando si ottiene  $\dot{y} = \dot{x} + 1$ . Sostituendo l'equazione diventa:  $\dot{y} - 1 = y^2$ , ovvero  $\dot{y} = y^2 + 1$  che può essere separata scrivendo  $g(y) = y^2 + 1$  e  $h(t) = 1$ . Pertanto:

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dt \implies \arctan y = t + \text{cost} \implies \arctan(x + t) = t + \text{cost} .$$



### 3. Sistemi dinamici planari e moti unidimensionali.

Un sistema dinamico planare è un'equazione differenziale nella forma

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1)$$

dove  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $f(x)$  è un campo vettoriale  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Sotto opportune ipotesi di regolarità per il campo vettoriale  $f$  la soluzione dell'equazione (3.1) con dato iniziale  $x(0) = x^0$  esiste ed è unica. Ingredienti basilari e notazione:

- con  $x(t) = \varphi(t, x^0)$  si denota l'unica soluzione dell'equazione (3.1) con dato iniziale  $x^0$ . Tale soluzione verrà chiamata *traiettoria* o *orbita* uscente dal punto  $x^0$ .
- Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  tale che  $f(x_0) = 0$  è detto punto di *equilibrio (critico)* per il sistema dinamico (3.1). Per i concetti relativi alla *stabilità* di un punto critico si rimanda al paragrafo 1.4 in [1]. Negli esercizi verrà usata la tecnica della linearizzazione ed il Teorema di Ljapunov.
- Una costante del moto per il sistema (3.1) è una funzione  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\dot{H}(\varphi(t, x^0)) = \langle \nabla H(\varphi(t, x^0)), f(\varphi(t, x^0)) \rangle = 0$$

lungo ogni possibile traiettoria  $\varphi(t, x^0)$ , ovvero per ogni dato iniziale  $x^0$ .

- Se  $H(x)$  è una costante del moto allora le curve regolari  $H(x) = \text{cost}$ , ottenute al variare della costante al secondo membro, sono dette *curve di livello*. Le traiettorie giacciono sulle curve di livello.

Si consideri, ora, un sistema meccanico unidimensionale costituito da una palla di massa  $m$  sottoposta all'azione della forza  $f(x)$ , con  $x$  la posizione della particella. Il moto è descritto dall'equazione di Newton

$$m\ddot{x} = f(x) \quad (3.2)$$

Se la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^1$ , allora dati  $x^0, \dot{x}^0 \in \mathbb{R}$  esiste ed è unica la soluzione  $x(t)$  della (3.2) con dato iniziale  $x(0) = x^0$  e  $\dot{x}(0) = \dot{x}^0$ . La soluzione  $x(t)$  dell'equazione del moto è detta *legge oraria*. Il problema (3.2) può essere ricondotto allo studio di un sistema dinamico (3.1) per mezzo delle nuove variabili  $q := x$  e  $p := m\dot{x}$ . D'altro canto è possibile lo studio qualitativo diretto delle soluzioni della (3.2), ovvero del moto della particella, per mezzo del *principio di conservazione dell'energia*. Ingredienti e notazione:

- si definisce *energia potenziale* la funzione  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che  $f(x) = -dV(x)/dx$ . I minimi ed i massimi di  $V(x)$  sono punti di equilibrio rispettivamente stabili ed instabili.
- Si verifica che l'*energia totale* della particella  $H(x, \dot{x}) := m\dot{x}^2/2 + V(x)$  è una costante del moto, ovvero  $dH(x, \dot{x})/dt = 0$ . Il principio di conservazione dell'energia si esprime scrivendo

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \quad (3.3)$$

ove  $E$  è una costante reale.

- Se  $x(t)$  è la soluzione dell'equazione di Newton allora la curva nello spazio  $x-\dot{x}$  (spazio delle fasi) di equazioni parametriche  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  è detta *orbita* del moto. Dal principio di conservazione dell'energia si deduce che le orbite giacciono necessariamente sulle curve di livello  $\Gamma_E := \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \dot{x}^2/2 + V(x) = E\}$ , ove  $E \in \mathbb{R}$  è una valore costante dell'energia.
- Si consideri il moto corrispondente ad un valore  $E \in \mathbb{R}$  dell'energia. Dalla (3.3) si ha che i punti accessibili al moto sono tutti e soli i punti nell'insieme  $\mathcal{I}_E := \{x \in \mathbb{R} : E - V(x) \geq 0\}$ .

**Esercizio 3.1 (Moto armonico semplice)** Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive il moto armonico semplice di una palla di massa  $m$  sottoposta all'azione di una molla di costante elastica  $\kappa$ :

$$m\ddot{z} + \kappa z = 0 \quad (3.4)$$

con  $m, \kappa \in \mathbb{R}$  e  $m, \kappa > 0$ . Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si riconduca la (3.4) ad un sistema dinamico planare. 2. Si determini una costante del moto. 3. Si determinino i punti di equilibrio e 4. se ne studi la loro stabilità. 5. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme  $\Pi$  dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche. 6. Si consideri un valore della costante del moto in corrispondenza del quale il moto è periodico e si calcoli il periodo dell'orbita.

Soluzione 3.1: 1. l'equazione (3.4) può essere scritta nella forma (3.1) introducendo le due nuove variabili:  $q = z$  e  $p = m\dot{z}$ , rispettivamente la posizione e l'impulso della palla. Infatti

$$\begin{cases} q = z \\ p = m\dot{z} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = \dot{z} \\ \dot{p} = m\ddot{z} = -\kappa z \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = -\kappa q \end{cases} \quad (3.5)$$

Il sistema (3.5) è un sistema dinamico nella forma (3.1) con  $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$  e  $f(q, p) = (p/m, -\kappa q)$ .

2. Se  $H(q, p)$  è una costante del moto allora

$$\dot{H}(q, p) = \langle \nabla H(q, p), f(q, p) \rangle = \frac{\partial H}{\partial q}(q, p)f_1(q, p) + \frac{\partial H}{\partial p}(q, p)f_2(q, p) = 0 \quad .$$

Allora per determinare una costante del moto è sufficiente richiedere che  $H(q, p)$  soddisfi le due seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) = -f_2(q, p) = +\kappa q \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = f_1(q, p) = p/m \end{cases} \quad .$$

Dalla prima si ottiene  $H(q, p) = \kappa q^2/2 + \psi(p)$  con  $\psi(p)$  una funzione incognita nella sola variabile  $p$ ; sostituendo nella seconda si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{m}p \implies \psi(p) = \frac{1}{2m}p^2 + \text{cost}$$

dove cost è una costante reale arbitraria. Scegliendo cost = 0 si ottiene

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2 \quad , \quad (3.6)$$

si noti che  $H(q, p)$  è l'energia totale della particella.

3. I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni  $f(q, p) = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} f_1(q, p) = 0 \\ f_2(q, p) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p/m = 0 \\ -\kappa q = 0 \end{cases} \implies P = (0, 0)$$

è l'unico punto di equilibrio.

4. Linearizzazione attorno a  $P$ : il sistema (3.5) è lineare. Può essere scritto nella forma  $\dot{x} = Ax$  con  $A$  la matrice  $2 \times 2$  reale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice  $A$ :

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/m \\ -\kappa & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{\kappa}{m} = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad .$$

Gli autovalori di  $A$  sono complessi coniugati con parte reale nulla. Non si può dire nulla sulla stabilità di  $P$ .

Seconda strategia: il punto  $P$  è estrema per la funzione  $H(q, p)$ . Ne studio le proprietà: scrivo la matrice Hessiana  $\mathcal{H}(q, p)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q} = \kappa \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{1}{m} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0$$

pertanto:

$$\mathcal{H}(q, p) = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} \quad .$$

Inoltre  $\det(\mathcal{H}(0, 0)) = \kappa/m > 0$  e  $\mathcal{H}_{1,1}(0, 0) = \kappa > 0$  implicano che  $P$  è un punto di minimo per la funzione  $H(q, p)$ . Si dimostra che la funzione  $W(q, p) = H(q, p) - H(0, 0)$  è una funzione di Ljapunov, quindi usando il Teorema di Ljapunov si conclude che  $P$  è un punto di equilibrio stabile.

5. In primo luogo osservo che  $H(0, 0) = 0$ . Fissato un numero reale  $E > 0$  la curva di livello con energia  $E$  ha equazione

$$\frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2 = E \quad . \quad (3.7)$$

Per ogni  $E > 0$  la curva di livello è un'ellisse centrata nell'origine (si veda la Fig. 3.1). Per  $E < 0$  non si hanno curve di livello. Per  $E = 0$  la curva di livello coincide con il punto di equilibrio stabile. Orbite periodiche: per ogni valore di  $E > 0$  la corrispondente curva di livello è una curva chiusa e regolare. Su di essa giace un'orbita periodica. Pertanto l'insieme dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche è  $\Pi = \mathbb{R} \setminus \{P\}$ .

6. Si consideri  $E > 0$ . Lungo l'orbita con energia  $E$  si ha  $p = \pm \sqrt{m(2E - \kappa q^2)}$ . Per ragioni di simmetria il periodo  $T$  è dato dal doppio del tempo impiegato a percorrere l'arco superiore della traiettoria di equazione

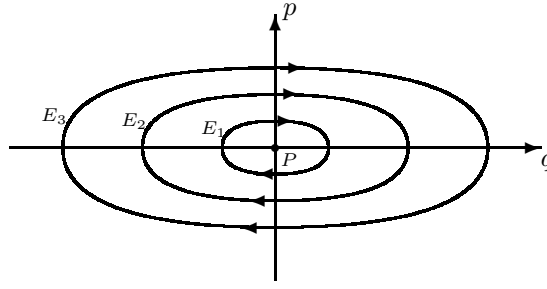


Fig. 3.1: Curve di livello per il moto armonico semplice.  $P = (0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile.  $H(P) = 0$  e  $E_3 > E_2 > E_1 > 0$ .

$p = \sqrt{m(2E - \kappa q^2)}$ . Il punto iniziale è  $(-\sqrt{2E/\kappa}, 0)$ , mentre quello finale è  $(\sqrt{2E/\kappa}, 0)$ . Usando la prima delle (3.5) si ha

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{m}p = \sqrt{\frac{2E - \kappa q^2}{m}} \implies \int_0^{T/2} dt = \int_{-\sqrt{2E/\kappa}}^{\sqrt{2E/\kappa}} \frac{dq}{\sqrt{(2E - \kappa q^2)/m}} = 2 \int_0^{\sqrt{2E/\kappa}} \frac{dq}{\sqrt{(2E - \kappa q^2)/m}} .$$

Eseguito la sostituzione  $q = \sqrt{2E/\kappa} \sin \varphi$  si ottiene

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{4m}{\kappa}} \int_0^{\pi/2} d\varphi \implies T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}} .$$

Si osservi che il periodo è indipendente da  $E$ . Si confronti questo risultato con il risultato dell'Esercizio 1.7.

**Esercizio 3.2 (Potenziale quartico)** Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine che descrive il moto di una palla di massa  $m$  sottoposta all'azione di una forza derivante dal potenziale  $V(x) = -az^2 + bz^4$ , con  $a, b > 0$ . Il moto è descritto dall'equazione di Newton:

$$m\ddot{z} + \frac{dV}{dz} = 0 . \quad (3.8)$$

Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si riconduca la (3.8) ad un sistema dinamico planare. 2. Si determini una costante del moto. 3. Si determinino i punti di equilibrio e 4. se ne studi la loro stabilità. 5. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme  $\Pi$  dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche. 6. Si scriva come integrale definito il periodo dell'orbita con dato iniziale  $x^0 = (\sqrt{a/4b}, 0)$ .

Soluzione 3.2: 1. l'equazione (3.8) può essere scritta nella forma (3.1) introducendo le due nuove variabili:  $q = z$  e  $p = m\dot{z}$ , rispettivamente la posizione e l'impulso della palla. Infatti

$$\begin{cases} q = z \\ p = m\dot{z} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = \dot{z} \\ \dot{p} = m\ddot{z} = -\frac{dV}{dz} = +2aq - 4bz^3 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = +2aq - 4bq^3 \end{cases} . \quad (3.9)$$

Il sistema (3.9) è un sistema dinamico nella forma (3.1) con  $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$  e  $f(q, p) = (p/m, 2aq - 4bq^3)$ .

2. Se  $H(q, p)$  è una costante del moto allora

$$\dot{H}(q, p) = \langle \nabla H(q, p), f(q, p) \rangle = \frac{\partial H}{\partial q}(q, p)f_1(q, p) + \frac{\partial H}{\partial p}(q, p)f_2(q, p) = 0 .$$

Allora per determinare una costante del moto è sufficiente richiedere che  $H(q, p)$  soddisfi le due seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) = -f_2(q, p) = -2aq + 4bq^3 \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = f_1(q, p) = p/m \end{cases} .$$

Dalla prima si ottiene  $H(q, p) = -aq^2 + bq^4 + \psi(p)$  con  $\psi(p)$  una funzione incognita nella sola variabile  $p$ . Sostituendo nella seconda delle precedenti si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{m}p \implies \psi(p) = \frac{1}{2m}p^2 + \text{cost}$$

dove cost è una costante reale arbitraria. Scegliendo  $\text{cost} = 0$  si ottiene

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 - aq^2 + bq^4, \quad (3.10)$$

si noti che  $H(q, p)$  è l'energia totale della particella.

3. I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni  $f(q, p) = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} f_1(q, p) = 0 \\ f_2(q, p) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p/m = 0 \\ 2aq - 4bq^3 = 0 \end{cases} \implies P_1 = (0, 0), P_2 = \left(\sqrt{\frac{a}{2b}}, 0\right), P_3 = \left(-\sqrt{\frac{a}{2b}}, 0\right)$$

sono i tre punti di equilibrio.

4. Linearizzazione attorno ai punti critici: dato  $\hat{x} = (\hat{q}, \hat{p})$  il sistema (3.9) può essere scritto nella forma  $\dot{x} = A(x - \hat{x}) + Q(x - \hat{x})$  con  $A$  la matrice  $2 \times 2$  reale

$$A(\hat{q}, \hat{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q}(\hat{q}, \hat{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial p}(\hat{q}, \hat{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial q}(\hat{q}, \hat{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial p}(\hat{q}, \hat{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 2a - 12b\hat{q}^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice  $A(\hat{x})$ :

$$\det(A(\hat{x}) - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/m \\ 2a - 12b\hat{q}^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{2a - 12b\hat{q}^2}{m} = 0 \implies \lambda_{1,2}(\hat{x}) = \pm \sqrt{\frac{2a - 12b\hat{q}^2}{m}}.$$

A questo punto posso studiare la stabilità dei tre punti critici  $P_1, P_2$  e  $P_3$ :

- $\lambda_{1,2}(P_1) = \pm \sqrt{2a/m}$ , esiste almeno un autovalore reale e positivo, quindi  $P_1$  è un punto di equilibrio instabile.
- $\lambda_{1,2}(P_2) = \pm 2i\sqrt{a/m}$ , gli autovalori hanno parte reale zero, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di  $P_2$ .
- $\lambda_{1,2}(P_3) = \pm 2i\sqrt{a/m}$ , gli autovalori hanno parte reale zero, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di  $P_3$ .

Seconda strategia: i punti  $P_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , sono estremali per la funzione  $H(q, p)$ . Ne studio le proprietà: scrivo la matrice Hessiana  $\mathcal{H}(q, p)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q} = -2a + 12bq^2 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \frac{\partial f_1}{\partial p} = \frac{1}{m} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0$$

pertanto:

$$\mathcal{H}(q, p) = \begin{pmatrix} -2a + 12bq^2 & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathcal{H}(q, p)) = \frac{12bq^2 - 2a}{m}.$$

Osservo che  $\det(\mathcal{H}(P_{2,3})) = 4a/m > 0$  e  $\mathcal{H}_{1,1}(P_{2,3}) = 4a > 0$ :  $P_{2,3}$  sono punti di minimo per la funzione  $H(q, p)$ . Si dimostra che la funzione  $W(q, p) = H(q, p) - H(P_{2,3})$  è una funzione di Ljapunov per  $P_2$  e per  $P_3$ , quindi usando il Teorema di Ljapunov si conclude che  $P_{2,3}$  sono punti di equilibrio stabile.

5. In primo luogo osservo che  $H(q, p)$  è funzione pari sia in  $q$  che in  $p$ , quindi mi limito a studiarne le curve di livello nel quadrante  $q, p \geq 0$  (I quadrante); negli altri quadranti le curve verranno ottenute per simmetria. Osservo, inoltre, che  $P_1$  è punto di equilibrio instabile e che  $H_1 := H(P_1) = 0$ : le curve di livello più interessanti sono quelle passanti per i punti critici instabili quindi

- considero la curva di livello  $\Gamma_{H_1} := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : H(q, p) = H_1\}$ . Nel quadrante  $q, p \geq 0$  l'equazione di tale curva è  $p = q\sqrt{2m(a - bq^2)}$ . La curva interseca l'asse  $p = 0$  in  $q = 0$  e  $q = \sqrt{a/b}$ , non è definita all'esterno dell'intervallo  $[0, \sqrt{a/b}]$  ed è regolare in  $(0, \sqrt{a/b})$  (si veda la Fig. 3.2). Su  $\Gamma_{H_1}$  giacciono tre orbite: due asintotiche a  $P_1$  ed una coincidente con il punto di equilibrio instabile  $x(t) = (0, 0)$ .
- Osservo che  $H(q, p)$  è nulla su  $\Gamma_{H_1}$  e che  $H(P_2) = H(P_3) = -a^2/4b < 0$ , quindi per la continuità della costante del moto  $H(q, p)$  le curve di livello relative ad energie negative si troveranno tutte all'interno di  $\Gamma_{H_1}$ , mentre quelle relative ad energie positive si troveranno tutte all'esterno.
- Considero  $E \in \mathbb{R}$  tale che  $-a^2/4b < E < 0$ : le regioni contenute all'interno di  $\Gamma_{H_1}$  contengono ciascuna un solo punto di equilibrio stabile, quindi le curve di livello relative a valori negativi dell'energia sono curve chiuse, regolari che ruotano attorno al relativo punto di equilibrio stabile (Teorema 4.37 in [1]). Su ciascuna componente connessa di ogni curva di livello giace un'orbita periodica attorno al relativo punto di equilibrio stabile.
- Sia  $E > 0$ : le curve di livello  $H(q, p) = E$  le disegno per continuità.

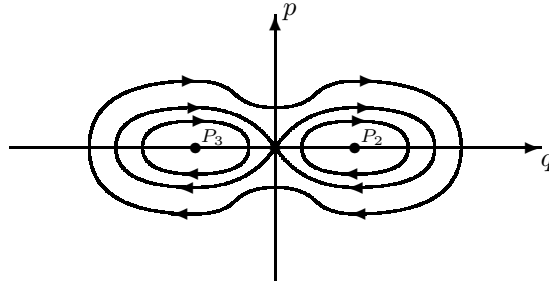


Fig. 3.2: Curve di livello per il potenziale quartico.

- I versi sulle curve di livello vengono determinati osservando che  $\dot{q} = p/m$  è positivo nel semipiano  $p > 0$  e negativo in quello  $p < 0$ .

Dalla discussione precedente si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è tutto lo spazio delle fasi ad eccezione dei punti di equilibrio e dei punti della curva di livello con energia zero; ovvero  $\Pi = \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_{H_1} \cup \{P_2, P_3\})$ .

6. Si consideri l'orbita generata dal dato iniziale  $x^0 = (\sqrt{a/4b}, 0)$ . Poiché  $\sqrt{a/4b} < \sqrt{a/2b} < \sqrt{a/b}$  il punto  $x^0$  si trova all'interno della regione delimitata dalla curva di livello passante per l'origine, quindi esso origina un'orbita periodica. Alternativamente si può osservare che  $H(x^0) = -3a^2/16b > H(P_2) = -a^2/4b$  implica  $x^0 \in \Pi$ . Determino i punti di inversione dell'orbita periodica risolvendo l'equazione  $H(q, 0) = -3a^2/16b$ . Oltre all'ovvia soluzione  $q^0 = \sqrt{a/4b}$  si trova  $q^1 = \sqrt{3a/4b}$ . Pertanto, osservato che  $H(q, p) = -3a^2/16b$  implica  $p = \sqrt{2m[-bq^4 + aq^2 - 3a^2/16b]}$  si ha

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{m}p = \sqrt{2m \left[ -bq^4 + aq^2 - \frac{3a^2}{16b} \right]} \implies \int_0^{T/2} dt = \int_{\sqrt{a/4b}}^{\sqrt{3a/4b}} \frac{1}{\sqrt{2m \left[ -bq^4 + aq^2 - \frac{3a^2}{16b} \right]}}$$

e quindi

$$T = 2 \int_{\sqrt{a/4b}}^{\sqrt{3a/4b}} \frac{1}{\sqrt{2m \left[ -bq^4 + aq^2 - \frac{3a^2}{16b} \right]}} \cdot$$

**Esercizio 3.3** Si consideri il sistema dinamico

$$\dot{z} = f(z) \quad \text{con} \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad f(z) = (2y - (x^2 - 1)^2 - 1, 4x(x^2 - 1)(y - 1)) \quad (3.11)$$

Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si determini una costante del moto. 2. Si determinino i punti di equilibrio e 3. se ne studi la loro stabilità. 4. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme  $\Pi$  dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche. 5. Si dimostri che l'orbita generata dal dato iniziale  $z_0 = (1, 3/4)$  è periodica e se ne scriva il periodo in forma di integrale definito. 6. Si trovi esplicitamente la soluzione con dato iniziale  $z_0 = (1, 1)$  e se ne discuta il comportamento asintotico.

Soluzione 3.3: 1. Se  $H(x, y)$  è una costante del moto allora

$$\dot{H}(x, y) = \langle \nabla H(x, y), f(x, y) \rangle = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)f_1(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)f_2(x, y) = 0 \quad .$$

Allora per determinare una costante del moto è sufficiente richiedere che  $H(x, y)$  soddisfi le due seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -f_2(x, y) = -4x(x^2 - 1)(y - 1) \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = f_1(x, y) = 2y - (x^2 - 1)^2 - 1 \end{cases} \quad .$$

Dalla seconda si ottiene  $H(x, y) = y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + \psi(x)$  con  $\psi(x)$  una funzione incognita nella sola variabile  $x$ . Sostituendo nella seconda delle precedenti si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4x(x^2 - 1)(y - y + 1) = 4x^3 - 4x \implies \psi(x) = x^4 - 2x^2 + \text{cost}$$

dove cost è una costante reale arbitraria. Scegliendo  $\text{cost} = 0$  si ottiene

$$H(x, y) = y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 2) \quad . \quad (3.12)$$

2. I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni  $f(x, y) = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2y - (x^2 - 1)^2 - 1 = 0 \\ 4x(x^2 - 1)(y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\implies P_1 = (0, 1), P_2 = (1, 1/2), P_3 = (-1, 1/2), P_4 = (\sqrt{2}, 1), P_5 = (-\sqrt{2}, 1)$$

sono i cinque punti di equilibrio.

3. Linearizzazione attorno ai punti critici: dato  $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y})$  il sistema (3.11) può essere scritto nella forma  $\dot{z} = A(z - \hat{z}) + Q(z - \hat{z})$  con  $A$  la matrice  $2 \times 2$  reale

$$A(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4(\hat{x}^2 - 1)\hat{x} & 2 \\ 4(\hat{y} - 1)(3\hat{x}^2 - 1) & 4\hat{x}(\hat{x}^2 - 1) \end{pmatrix} \quad .$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice  $A(\hat{z})$ :

$$\det(A(\hat{z}) - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -4\hat{x}(\hat{x}^2) - \lambda & 2 \\ 4(\hat{y} - 1)(3\hat{x}^2 - 1) & 4\hat{x}(\hat{x}^2 - 1) - \lambda \end{pmatrix} = -16\hat{x}^2(\hat{x}^2 - 1)^2 + \lambda^2 - 8(\hat{y} - 1)(3\hat{x}^2 - 1) = 0$$

$$\implies \lambda_{1,2}(\hat{z}) = \pm \sqrt{16\hat{x}^2(\hat{x}^2 - 1)^2 + 8(\hat{y} - 1)(3\hat{x}^2 - 1)} \quad .$$

A questo punto posso studiare la stabilità dei punti critici:

- $\lambda_{1,2}(P_1) = 0$ , gli autovalori sono nulli, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di  $P_1$ .
- $\lambda_{1,2}(P_{2,3}) = \pm 2i\sqrt{2}$ , gli autovalori hanno parte reale zero, quindi non si può dire nulla sulla stabilità di  $P_2$  e di  $P_3$ .
- $\lambda_{1,2}(P_{4,5}) = \pm 4\sqrt{2}$ , gli autovalori sono reali e distinti; ne esiste uno positivo, quindi  $P_4$  e  $P_5$  sono punti di equilibrio instabile.

Seconda strategia: i punti  $P_i$ , con  $i = 1, \dots, 5$ , sono estremali per la funzione  $H(x, y)$ . Ne studio le proprietà: scrivo la matrice Hessiana  $\mathcal{H}(x, y)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} = -4(y - 1)(3x^2 - 1) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = 0$$

pertanto:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} -4(y - 1)(3x^2 - 1) & -4x(x^2 - 1) \\ -4x(x^2 - 1) & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathcal{H}(x, y)) = -8(y - 1)(3x^2 - 1) - 16x^2(x^2 - 1)^2 \quad .$$

Osservo che  $\det(\mathcal{H}(P_{2,3})) = 8 > 0$  e  $\mathcal{H}_{1,1}(P_{2,3}) = 4 > 0$ :  $P_{2,3}$  sono punti di minimo per la funzione  $H(x, y)$ . Si dimostra che la funzione  $W(x, y) := H(x, y) - H(P_{2,3})$  è una funzione di Ljapunov per  $P_2$  e per  $P_3$ , quindi usando il Teorema di Ljapunov si conclude che  $P_{2,3}$  sono punti di equilibrio stabile. Sul punto  $P_1$  non si può, invece, dire nulla perché  $\det(\mathcal{H}(P_1)) = 0$ , ma dallo studi delle curve di livello emergerà che si tratta di un punto di equilibrio instabile.

4. In primo luogo osservo che  $H(x, y)$  è una funzione pari nella variabile  $x$ , quindi le curve di livello avranno l'asse  $y$  per asse di simmetria. Inoltre  $H(P_1) = H(P_4) = H(P_5) = -1$ ,  $P_4$  e  $P_5$  sono punti instabili, le curve di livello più interessanti sono quelle passanti per i punti critici instabili, quindi

- considero la curva di livello  $\Gamma_{-1} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = -1\}$ . In forma implicita l'equazione di tale curva è:

$$y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 2) + 1 = 0 \implies y^2 - y - (x^2 - 1)^2 y + (x^2 - 1)^2 = 0$$

$$\implies y(y - 1) - (y - 1)(x^2 - 1)^2 = 0 \implies (y - 1)[y - (x^2 - 1)^2] = 0$$

quindi la curva di livello  $\Gamma_{-1}$  è costituita dalle due curve  $y = 1$  e  $y = (x^2 - 1)^2$  (si veda la Fig. 3.3). Su  $\Gamma_{-1}$  giacciono undici orbite: otto orbite asintotiche ai punti di equilibrio instabili e tre punti di equilibrio instabili.

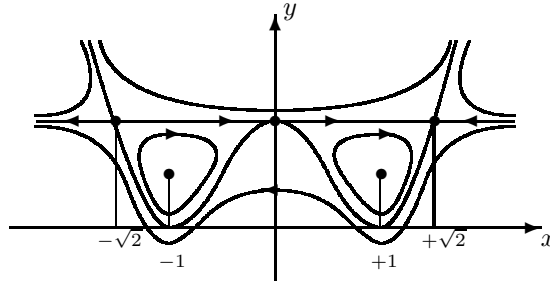


Fig. 3.3: Curve di livello per il sistema dinamico (3.11). I versi non indicati si deducono per continuità.

- Osservo che  $H(x, y) = -1$  su  $\Gamma_{H_1}$  e che  $H(P_2) = H(P_3) = -5/2 < -1$ , quindi per la continuità della costante del moto  $H(x, y)$  le curve di livello relative ad energie nell'intervallo  $[-5/2, -1]$  si troveranno tutte all'interno di  $\Gamma_{-1}$ , mentre quelle relative ad energie maggiori di  $-1$  si troveranno tutte all'esterno. Più precisamente: definisco i due insiemi  $D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \sqrt{2}, (x^2 - 1)^2 < y < 1\}$  e  $D_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} < x < 0, (x^2 - 1)^2 < y < 1\}$ . Allora le curve di livello con energia in  $[-5/2, -1]$  si trovano in  $D_2 \cup D_3$ , mentre quelle relative ad energie maggiori di  $-1$  si trovano in  $\mathbb{R}^2 \setminus (D_2 \cup D_3 \cup \Gamma_{-1})$ .
- Considero  $E \in \mathbb{R}$  tale che  $-5/2 < E < -1$ :  $D_2$  e  $D_3$  contengono ciascuna un solo punto di equilibrio stabile, quindi le curve di livello relative a valori negativi dell'energia sono curve chiuse, regolari che ruotano attorno al relativo punto di equilibrio stabile (Teorema 4.37 in [1]). Su ciascuna componente connessa di ogni curva di livello giace un'orbita periodica attorno al relativo punto di equilibrio stabile (si veda la Fig. 3.3).
- Sia  $E > -1$ : le curve di livello  $H(x, y) = E$  le disegno per continuità. Queste curve di livello sono aperte, su ognuna di esse giace un'orbita asintotica all'infinito.
- I versi su  $\Gamma_{-1}$  vengono determinati osservando che 1. su un tratto di curva di livello che non interseca alcun punto di equilibrio il verso non cambia, 2.  $f_1(1, 1) = 1 > 0$ ,  $f_1(1, 0) = -1 < 0$ ,  $f_1(2, 1) = -8 < 0$  e  $f_1(2, 9) = 7 > 0$ . Sulle altre curve di livello i versi possono essere trovati per continuità.

Dalla discussione precedente si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è  $\Pi = D_2 \cup D_3$ .

5. Si consideri l'orbita generata dal dato iniziale  $z_0 = (1, 3/4)$ . Osservo che  $z_0 \in D_2$  implica che l'orbita generata da  $z_0$  è periodica. Per poter scrivere il periodo dell'orbita è necessario scrivere l'equazione della curva di livello in forma esplicita, cioè devo ricavare la  $y$  in funzione della  $x$  o viceversa:

$$H(x, y) = H(z_0) \implies y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 1) = -\frac{19}{16} \implies$$

$$y^2 - [(x^2 - 1)^2 + 1]y + x^2(x^2 - 1) + 1 = -\frac{3}{16} \implies (y - 1)[y - (x^2 - 1)^2] = -\frac{3}{16} \implies (x^2 - 1)^2 = y + \frac{3}{16(y - 1)}.$$

Dalla precedente si può ricavare la variabile  $x$  in funzione della variabile  $y$  semplicemente eseguendo delle radici quadrate. Bisogna, però controllare che i radicandi siano positivi: il secondo membro è positivo se e solo se  $16y^2 - 16y + 3 \leq 0$ , ovvero se  $1/4 \leq y \leq 3/4$ . Da questa osservazione si deduce che l'orbita è compresa tra le due rette  $y = 1/4$  e  $y = 3/4$  e le tocca nei punti  $z_0 = (1, 3/4)$  e  $z_1 = (1, 1/4)$ . Quindi per i valori di  $y$  permessi si ha:

$$x^2 - 1 = \pm \sqrt{y + \frac{3}{16(y - 1)}}.$$

La scelta del segno va fatta osservando che  $x$  può essere maggiore o minore di 1. Nel primo caso va scelto il segno  $+$  mentre nel secondo va scelto il segno  $-$ , perché il primo membro è rispettivamente positivo e negativo nei due casi. Quindi l'equazione della traiettoria diventa:

$$x^2 = \begin{cases} 1 + \sqrt{y + \frac{3}{16(y - 1)}} & \text{se } x > 1 \\ 1 - \sqrt{y + \frac{3}{16(y - 1)}} & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Infine, dopo aver osservato che nelle due espressioni precedenti il membro di destra è positivo e che l'orbita

giace nel semipiano  $x > 0$ , si può scrivere l'equazione dell'orbita in forma esplicita:

$$x(y) = \begin{cases} \sqrt{1 + \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}} & \text{se } x > 1 \\ \sqrt{1 - \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}} & \text{se } x < 1 \end{cases} . \quad (3.13)$$

Il periodo dell'orbita può essere calcolato osservando che dalle equazioni (3.11) si ha

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \implies \frac{dy}{4x(y)(x^2(y) - 1)(y - 1)} = dt$$

ove  $x = x(y)$  è l'equazione (3.13). Per integrare la precedente si definisce  $t_1$  l'istante in cui l'orbita raggiunge  $z_1$  e si osserva che in  $t_1$  l'espressione esplicita della funzione  $x(y)$  cambia. Quindi:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_0^{t_1} dt + \int_{t_1}^T dt = \int_{3/4}^{1/4} \frac{dy}{4x(y)(x^2(y) - 1)(y - 1)} + \int_{1/4}^{3/4} \frac{dy}{4x(y)(x^2(y) - 1)(y - 1)} \\ \implies T &= \int_{3/4}^{1/4} \frac{dy}{4\sqrt{1 + \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}} \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}} (y - 1)} - \int_{1/4}^{3/4} \frac{dy}{4\sqrt{1 - \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}}} \sqrt{y + \frac{3}{16(y-1)}} (y - 1)} . \end{aligned}$$

6. Il punto  $z_0 = (1, 1)$  si trova sul tratto  $y = 1$  della curva di livello  $\Gamma_{-1}$ . Allora l'orbita sarà tale che  $y(t) = 1$ . Sostituendo nel sistema dinamico di partenza si ottiene  $\dot{x} = 1 - (x^2 - 1)^2$  che può essere integrata e fornisce la legge oraria. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = 1 - (x^2 - 1)^2 &\implies dt = \frac{dx}{x^2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)} \implies \int_0^t dt' = \int_1^{x(t)} \frac{dx}{x^2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)} \\ &\implies t = \int_1^{x(t)} dx \left\{ \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}(\sqrt{2} - x)} + \frac{1}{4\sqrt{2}(\sqrt{2} + x)} \right\} \\ &\implies t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2x(t)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + x(t)}{\sqrt{2} - x(t)} \end{aligned}$$

Pur non sapendo invertire la legge oraria è possibile controllare il comportamento all'infinito: basta osservare che per  $x \rightarrow \sqrt{2}$  il tempo  $t$  tende a  $+\infty$ , mentre per  $x \rightarrow 0$  si ha  $t \rightarrow -\infty$ .

**Esercizio 3.4 (Pendolo rotante)** Si consideri il problema di un pendolo di massa  $m = 1$  e lunghezza  $\ell = 1$  oscillante in un piano vincolato a ruotare con velocità angolare costante  $\omega > 0$  attorno ad un asse. Il moto è descritto dall'equazione di Newton:

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta \quad , \quad (3.14)$$

ove  $\theta$  è l'angolo tra il pendolo e l'asse di rotazione. Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si riconduca la (3.14) ad un sistema dinamico planare. 2. Si determini una costante del moto. 3. Si determinino i punti di equilibrio e 4. se ne studi la loro stabilità. 5. Si disegnino le curve di livello e si determini l'insieme dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche. 6. Si studi il caso in cui venga introdotto una forza resistiva  $-\alpha\dot{\theta}$  con  $\alpha > 0$ . In particolare si determinino eventuali punti di equilibrio asintoticamente stabili e se ne stimi il bacino d'attrazione.

Soluzione 3.4: studio il problema nell'intervallo  $\theta \in [0, \pi]$ . Per  $\theta < 0$  si ottengono gli stessi risultati perché l'equazione del moto è simmetrica nello scambio  $\theta \rightarrow -\theta$ .

1. l'equazione (3.14) può essere scritta nella forma (3.1) introducendo le due nuove variabili:  $q = \theta$  e  $p = \dot{\theta}$ . Infatti

$$\begin{cases} q = \theta \\ p = \dot{\theta} \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = \dot{\theta} \\ \dot{p} = \ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q \end{cases} . \quad (3.15)$$

Il sistema (3.15) è un sistema dinamico nella forma (3.1) con  $x = (q, p) \in \mathbb{R}^2$  e  $f(q, p) = (p, \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q)$ .



2. Se  $H(q, p)$  è una costante del moto allora

$$\dot{H}(q, p) = \langle \nabla H(q, p), f(q, p) \rangle = \frac{\partial H}{\partial q}(q, p)f_1(q, p) + \frac{\partial H}{\partial p}(q, p)f_2(q, p) = 0 \quad .$$

Allora per determinare una costante del moto è sufficiente richiedere che  $H(q, p)$  soddisfi le due seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) = -f_2(q, p) = -\omega^2 \sin q \cos q + g \sin q \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = f_1(q, p) = p \end{cases} \quad .$$

Dalla prima si ottiene  $H(q, p) = -g \cos q + (\omega^2/4) \cos 2q + \psi(p)$  con  $\psi(p)$  una funzione incognita nella sola variabile  $p$ . Sostituendo nella seconda delle precedenti si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = p \implies \psi(p) = \frac{1}{2}p^2 + \text{cost}$$

dove  $\text{cost}$  è una costante reale arbitraria. Scegliendo  $\text{cost} = 0$  si ottiene

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 - g \cos q + \frac{\omega^2}{4} \cos 2q \quad , \quad (3.16)$$

si noti che  $H(q, p)$  è l'energia totale della particella.

3. I punti di equilibrio soddisfano il sistema di equazioni  $f(q, p) = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} f_1(q, p) = 0 \\ f_2(q, p) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p = 0 \\ \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q = 0 \end{cases} \quad .$$

Per risolvere il sistema precedente bisogna distinguere due casi: definisco  $\rho := g/\omega^2$  ed osservo che nel caso  $\rho > 1$  (piccola forza centrifuga) esistono due soli punti di equilibrio:  $P_1 = (0, 0)$  e  $P_2 = (\pi, 0)$ . Nel caso  $\rho < 1$  (grande forza centrifuga) esiste un ulteriore punto di equilibrio  $P_3 = (\arcsin \rho, 0)$ .

4. Linearizzazione attorno ai punti critici: dato  $\hat{x} = (\hat{q}, \hat{p})$  il sistema (3.15) può essere scritto nella forma  $\dot{x} = A(x - \hat{x}) + Q(x - \hat{x})$  con  $A$  la matrice  $2 \times 2$  reale

$$A(\hat{q}, \hat{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q}(\hat{q}, \hat{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial p}(\hat{q}, \hat{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial q}(\hat{q}, \hat{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial p}(\hat{q}, \hat{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 (\cos 2\hat{q} - \rho \cos \hat{q}) & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Scrivo l'equazione secolare e determino gli autovalori della matrice  $A(\hat{x})$ :

$$\begin{aligned} \det(A(\hat{x}) - \lambda \mathbb{I}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 (\cos 2\hat{q} - \rho \cos \hat{q}) & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \omega^2 (\cos 2\hat{q} - \rho \cos \hat{q}) = 0 \\ \implies \lambda_{1,2}(\hat{x}) &= \pm \sqrt{\omega^2 (\cos 2\hat{q} - \rho \cos \hat{q})} = \pm \omega \sqrt{\cos 2\hat{q} - \rho \cos \hat{q}} \quad . \end{aligned}$$

A questo punto posso studiare la stabilità dei punti critici: in primo luogo osservo che

$$\lambda_{1,2}(P_1) = \pm \omega \sqrt{1 - \rho}, \quad \lambda_{1,2}(P_2) = \pm \omega \sqrt{1 + \rho} \quad \text{e} \quad \lambda_{1,2}(P_3) = \pm i \omega \sqrt{1 - \rho^2}$$

con l'ultimo autovalore che ha senso soltanto nel caso  $\rho < 1$ . Quindi

- se  $0 < \rho < 1$  allora  $P_1$  e  $P_2$  sono instabili, mentre su  $P_3$  non si può dire nulla.
- Se  $\rho \geq 1$  allora  $P_2$  è instabile, mentre su  $P_1$  non si può dire nulla.

Seconda strategia: i punti  $P_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , sono estremali per la funzione  $H(q, p)$ . Ne studio le proprietà: scrivo la matrice Hessiana  $\mathcal{H}(q, p)$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = -\frac{\partial f_2}{\partial q} = -\omega^2 (\cos 2q - \rho \cos q) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \frac{\partial f_1}{\partial p} = 1 \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0$$

pertanto:

$$\mathcal{H}(q, p) = \begin{pmatrix} -\omega^2 (\cos 2q - \rho \cos q) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(\mathcal{H}(q, p)) = -\omega^2 (\cos 2q - \rho \cos q) \quad .$$

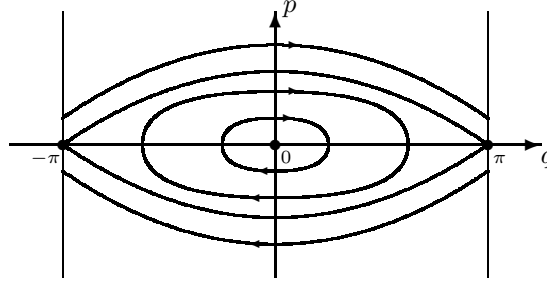


Fig. 3.4: Curve di livello per il pendolo rotante nel caso  $\rho \geq 1$ . I versi non indicati in figura si ottengono per continuità.

Osservo che nel caso  $\rho < 1$  si ha  $\det(\mathcal{H}(P_3)) = \mathcal{H}_{1,1}(P_3) = \omega^2(1 - \rho^2) > 0$ , allora  $P_3$  è punto di minimo per la funzione  $H(q, p)$ . Si dimostra che la funzione  $W(q, p) = H(q, p) - H(P_3)$  è una funzione di Ljapunov per  $P_3$ , quindi usando il Teorema di Ljapunov si conclude che  $P_3$  è punto di equilibrio stabile nel caso  $\rho < 1$ . Inoltre osservo che  $\det(\mathcal{H}(P_1)) = \mathcal{H}_{1,1}(P_1) = \omega^2(\rho - 1)$ , quindi si può concludere che nel caso  $\rho > 1$  il punto  $P_1$  è stabile. Nel caso  $\rho = 1$  non si può dire nulla perché  $\det(\mathcal{H}(P_1)) = \mathcal{H}_{1,1}(P_1) = 0$ , ma questo caso può essere discusso in modo diretto, infatti osservo che  $H(q, p) = p^2/2 + (\omega^2/4)(2 \cos^2 q - 4 \cos q - 1)$  e  $H(P_1) = -3\omega^2/4$ . Quindi,

$$H(q, p) - H(P_1) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2(2 \cos q - 1)^2 > 0 \quad \forall (q, p) \neq (0, 0) \quad .$$

Allora  $P_1$  è un punto di minimo per  $H(q, p)$  e quindi è un punto di equilibrio stabile. Riassumo quindi i risultati sulla stabilità:

- $\rho < 1$ :  $P_1$  e  $P_2$  instabili,  $P_3$  stabile.
- $\rho \geq 1$ :  $P_1$  stabile,  $P_2$  instabile.

5. Studio le curve di livello nel caso  $\rho = 1$ . Nel caso  $\rho > 1$  si ottengono dei risultati analoghi. Osservo che  $P_2$  è punto di equilibrio instabile e che  $H_2 := H(P_2) = 5\omega^2/4$ : le curve di livello più interessanti sono quelle passanti per i punti critici instabili quindi

- considero la curva di livello  $\Gamma_{H_2} := \{(q, p) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : H(q, p) = H_2\}$ . Nel semipiano  $p > 0$  l'equazione di tale curva è  $p = \omega\sqrt{4 - (\cos q - 1)^2}$ . Per disegnare la curva è sufficiente osservare che in  $[0, \pi]$  la funzione  $4 - (\cos q - 1)^2$  decresce da 4 a 0: risulta, quindi, il grafico in Fig. 3.4 con le intersezioni con l'asse  $q = 0$  nei punti  $\pm 2\omega$ . Su  $\Gamma_{H_2}$  giacciono tre orbite: due asintotiche a  $P_2 \equiv -P_2$  ed una coincidente con il punto di equilibrio instabile  $P_2 \equiv -P_2$ .
- Osservo che  $H(P_2) = 5\omega^2/4 > H(P_1) = -3\omega^2/4 =: H_1$ ; quindi per la continuità della costante del moto  $H(q, p)$  le curve di livello relative ad energie comprese tra  $H_1$  e  $H_2$  si troveranno tutte all'interno di  $\Gamma_{H_2}$ , mentre quelle relative ad energie maggiori di  $H_2$  si troveranno tutte all'esterno.
- Considero un'energia  $H_1 < E < H_2$ : la regione contenuta all'interno di  $\Gamma_{H_2}$  contiene un solo punto di equilibrio stabile  $P_1$ , quindi le curve di livello sono curve chiuse e regolari che ruotano attorno a  $P_1$  (Teorema 4.37 in [1]). Su ciascuna curva di livello giace un'orbita periodica attorno al punto di equilibrio stabile.
- Sia  $E > H_2$ : le curve di livello  $H(q, p) = E$  le disegno per continuità.
- I versi sulle curve di livello vengono determinati osservando che  $\dot{q} = p/m$  è positivo nel semipiano  $p > 0$  e negativo in quello  $p < 0$ .

Dalla discussione precedente si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è tutto lo spazio delle fasi ad eccezione dei punti di equilibrio e dei punti della curva di livello con energia  $H_2$ ; ovvero  $\Pi = [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \setminus (\Gamma_{H_2} \cup \{P_1, P_2\})$ .

Nel caso  $\rho < 1$  lo studio delle curve di livello procede in modo analogo. Una maggiore complicazione nei calcoli è dovuta al fatto che ci sono due punti di equilibrio instabili con energia diversa, infatti  $H(P_1) = \omega^2(1/4 - \rho) < \omega^2(1/4 + \rho) = H(P_2)$ . Quindi in questo caso è necessario disegnare due diverse curve separatrici. I risultati sono in Fig. 3.5.

Dalla Fig. 3.5 si ha che l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è tutto lo spazio delle fasi ad eccezione dei punti di equilibrio e dei punti delle due separatrici, ovvero  $\Pi = [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \setminus (\Gamma_{H_1} \cup \Gamma_{H_2})$ .

6. Con l'introduzione del termine dissipativo l'equazione del moto diventa  $\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta - \alpha \dot{\theta}$  con  $\alpha > 0$ . Con la stessa sostituzione introdotta al punto 1 si ottiene il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \omega^2 \sin q \cos q - g \sin q - \alpha p \end{cases} \quad (3.17)$$

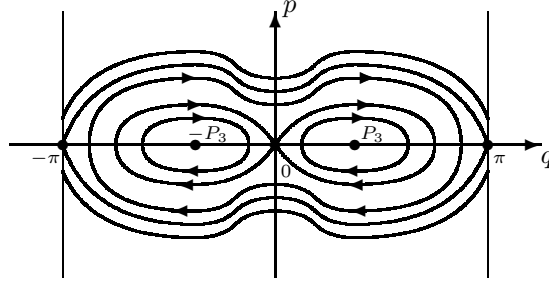


Fig. 3.5: Curve di livello per il pendolo rotante nel caso  $\rho < 1$ . I versi non indicati in figura si ottengono per continuità.

Il sistema dinamico è nella forma  $(\dot{q}, \dot{p}) = f'(q, p)$  con  $f'(q, p) = f(q, p) + (0, -\alpha p)$ . Voglio studiare la stabilità dei punti critici di questo nuovo sistema nel caso  $\rho < 1$ : in primo luogo osservo che la funzione  $H(q, p)$  non è una costante del moto per il nuovo problema. Infatti

$$\begin{aligned} \dot{H}(q, p) &= \langle \nabla H(q, p), f'(q, p) \rangle = \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) f'_1(q, p) + \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) f'_2(q, p) = -f_2(q, p) f'_1(q, p) + f_1(q, p) f'_2(q, p) \\ &= -f_2(q, p) f_1(q, p) + f_1(q, p) (f_2(q, p) - \alpha p) = -\alpha p f_1(q, p) = -\alpha p^2 \end{aligned}$$

che non è una funzione identicamente nulla. Si vede facilmente che i punti critici sono  $P_1, P_2$  e  $P_3$  e linearizzando attorno a  $P_1$  e  $P_2$  si vede che si tratta di punti instabili. Discuto dettagliatamente il punto  $P_3$ : la matrice di linearizzazione si scrive

$$A'(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2(\rho^2 - 1) & -\alpha \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori  $\lambda$  sono le soluzioni dell'equazione secolare  $\lambda^2 + \alpha\lambda + \omega^2(1 - \rho^2) = 0$ . Si ottiene, quindi,  $\lambda_{1,2} = [-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2(1 - \rho^2)}]/2$ ; si verifica facilmente che  $\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2) < 0$ , quindi il punto  $P_3$  è asintoticamente stabile.

Stima del bacino d'attrazione di  $P_3$ : lo scopo è determinare un dominio chiuso  $D \subset [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$  tale che per ogni  $x^0 \in D$  la traiettoria  $x(t) = \varphi(t, x^0)$  con dato iniziale  $x^0$  tenda asintoticamente a  $P_3$ , ovvero  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = P_3$ . Prima strategia: il Teorema di Ljapunov. Se esiste una funzione  $W : [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale per  $\varepsilon > 0$  soddisfa le seguenti quattro ipotesi

- $W$  è definita e di classe  $C^1$  nella palla aperta  $B_{P_3}(\varepsilon)$  centrata in  $P_3$  e di raggio  $\varepsilon$ ;
- $W(P_3) = 0$  e  $W(x) > 0$  per ogni  $x \in B_{P_3}(\varepsilon) \setminus \{P_3\}$ ;
- $\dot{W}(x) \leq 0$  per ogni  $x \in B_{P_3}(\varepsilon)$ ;
- $\dot{W}(x) < 0$  per ogni  $x \in B_{P_3}(\varepsilon) \setminus \{P_3\}$ ;

allora il punto  $P_3$  è asintoticamente stabile e  $B_{P_3}(\varepsilon)$  è contenuto nel suo bacino d'attrazione.

Una candidata naturale per  $W$  è la funzione

$$W(q, p) := H(q, p) - H(P_3) = \frac{1}{2}p^2 + \omega^2 \left[ \frac{1}{2}(\cos^2 q + \rho^2) - \rho \cos q \right] .$$

Il punto  $P_3$  è un minimo per la funzione  $W(q, p)$  e  $W(P_3) = 0$ , quindi è possibile trovare un  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo tale che le prime due ipotesi del Teorema di Ljapunov siano soddisfatte. Anche la terza ipotesi è soddisfatta, perché  $\dot{W}(q, p) = -\alpha p^2 \leq 0$  in  $B_{P_3}(\varepsilon)$ ; ma sulla quarta ipotesi la funzione scelta fallisce perché sul segmento ottenuto intersecando la palla aperta  $B_{P_3}(\varepsilon)$  con l'asse  $p = 0$  si ha che  $\dot{W}(q, p)$  si annulla. Più precisamente:  $\dot{W}(x) = 0$  per ogni  $x \in I_{P_3}(\varepsilon) := \{(q, p) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} : p = 0\}$ .

È abbastanza naturale osservare che l'insieme su cui la funzione  $W$  fallisce non è un insieme "molto interessante" per il moto del nostro sistema, nel senso che non è possibile trovare delle traiettorie costituite unicamente da punti di  $I_{P_3}(\varepsilon)$ . Infatti: per assurdo sia  $x(t) = (q(t), p(t))$  una traiettoria che giace interamente su  $I_{P_3}(\varepsilon)$ , allora  $p(t) = 0$  per ogni  $t$ . Quindi

$$\dot{p}(t) = 0 \implies 0 = f'_2(q(t), p(t)) = f'_2(q(t), 0) = f_2(q(t), 0) \implies q(t) = \arcsin \rho .$$

Allora l'unica traiettoria tutta contenuta in  $I_{P_3}(\varepsilon)$  è il punto di equilibrio  $P_3$ . A questo punto è ovvio fare ricorso al Teorema di Barbasin. Se esiste una funzione  $W : [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa alle prime tre ipotesi del Teorema di Ljapunov ed esiste un compatto  $D$  tale che

4.1.  $P_3 \in D$ ;

4.2. se  $I_D := \{x \in D \setminus \{P_3\} : \dot{W}(x) = 0\}$ , non esistono traiettorie costituite unicamente da punti di  $I_D$ ;

4.3.  $D$  è positivamente invariante;

allora  $D$  è contenuto nel bacino d'attrazione di  $P_3$ . Si è già visto che la funzione  $W(q, p)$  soddisfa le prime tre ipotesi del Teorema di Ljapunov. Definisco  $D$  come l'insieme compatto costituito da tutti i punti di  $[0, \pi] \times \mathbb{R}$  (seleziono il semipiano  $q \geq 0$ ) contenuti all'interno di una curva di livello con energia  $H = H(P_1) - \delta$  e  $\delta > 0$  piccolo, nel senso che  $\delta < H(P_0) - H(P_3) = \omega^2(1 - \rho)^2/2$ . Il dominio  $D$  soddisfa la 4.1 per costruzione e la 4.2 in virtù dell'osservazione precedente. Quindi resta da dimostrare che  $D$  è positivamente invariante: per fare ciò è sufficiente osservare che sui punti della frontiera di  $D$ , ovvero sui punti di  $\Gamma_H$  il campo  $f'$  punta verso l'interno, ovvero  $\langle f', \hat{n} \rangle < 0$ , con  $\hat{n}$  il versore normale a  $\Gamma_H$  in un suo punto. È ovviamente possibile calcolare in modo esplicito il prodotto scalare  $\langle f', \hat{n} \rangle$ , ma è anche sufficiente osservare che  $f$  è tangente a  $\Gamma_H$ , perché  $H$  è una costante del moto per il sistema (3.15), e quindi  $f'$  punta verso l'interno di  $D$  perché  $f' = f + (0, -\alpha p)$  e  $-\alpha p$  è positivo per  $p < 0$  e negativo per  $p > 0$ .

**Esercizio 3.5** *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale*

$$\ddot{x} + \frac{dV}{dx}(x) = 0 \quad (3.18)$$

con  $x \in \mathbb{R}$  e l'energia potenziale data da  $V(x) = (x^2 - 1)(x + 2)^2$ . Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si scriva il principio di conservazione dell'energia. 2. Si studi la funzione energia potenziale e si determino i punti di equilibrio stabile ed instabile. 3. Si discutano qualitativamente le soluzioni della (3.18) al variare dell'energia totale del sistema. 4. Si determini l'insieme  $\Pi$  dei dati iniziali che generano orbite periodiche. 5. Si dimostri che lungo la separatrice il moto è asintotico al punto di equilibrio instabile. Si studi, inoltre, il comportamento asintotico della separatrice attorno al punto di equilibrio instabile. 6. Si dimostri che per  $E = 0$  esiste un moto periodico. Se ne stimi il periodo, lo si calcoli esattamente e si confrontino le stime con il valore esatto. 7. Si scriva come integrale definito il periodo di un moto periodico con energia  $V_5 < E < V_4$ . Si dimostri che è finito.

Soluzione 3.5: la (3.18) descrive il moto di una palla di massa  $m = 1$  sottoposta all'azione della forza  $f(x) = -dV(x)/dx = -2(x + 2)(2x^2 + 2x - 1)$ .

1. Sia  $E \in \mathbb{R}$  il principio di conservazione dell'energia si scrive

$$H(x, \dot{x}) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + (x^2 - 1)(x + 2)^2 = E \quad (3.19)$$

2. Insieme di definizione: la funzione  $V(x)$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Zeri della funzione:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -1$  e  $x_3 = +1$ . Segno della funzione:  $V(x) \geq 0$  se e solo se  $x \leq x_2$  e  $x \geq x_3$ . Derivata:  $V'(x) = 2(x + 2)(2x^2 + 2x - 1)$ . Punti estremali:  $x_1 = -2$ ,  $x_4 = -(1 + \sqrt{3})/2$  e  $x_5 = -(1 - \sqrt{3})/2$ ;  $x_1$  e  $x_5$  sono punti di minimo, mentre  $x_4$  è un punto di massimo. Si osserva che  $x_1 < x_4 < x_2 < x_5 < x_3$ . Valore assunto dalla funzione negli estremali:

$$V(x_1) = 0 \quad V_4 := V(x_4) = \frac{\sqrt{3}}{8}(3 - \sqrt{3})^2 \quad V_5 := V(x_5) = -\frac{\sqrt{3}}{8}(3 + \sqrt{3})^2 \quad .$$

Infine osservo che la funzione diverge positivamente quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Si ottiene quindi il grafico in Fig. 3.6. Si osserva che  $x_1$  e  $x_5$  sono punti di equilibrio stabile, mentre  $x_4$  è un punto di equilibrio instabile.

3. Descrizione qualitativa delle soluzioni della (3.18). Considero i seguenti intervalli di energia.

- $E < V_5$ :  $V_5$  è il minimo assoluto della funzione  $V(x)$ , quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha  $E - V(x) < 0$ . Non esiste moto,  $\mathcal{I}_E = \emptyset$ .
- $E = V_5$ : il punto  $x_5$  è l'unico punto tale che  $E - V(x) \geq 0$ , allora  $\mathcal{I}_E = \{x_5\}$ . La curva di livello è costituita da un solo punto:  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1 + \sqrt{3})/2, \dot{x} = 0\}$ . L'unica possibile soluzione di (3.18) è il punto di equilibrio stabile  $x(t) = x_5$ .
- $V_5 < E < 0$ : denoto con  $x_1^E < x_2^E$  le due soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è l'intervallo  $\mathcal{I}_E = [x_1^E, x_2^E]$ . La curva di livello  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_1^E \leq x \leq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$  è una curva chiusa e regolare attorno a  $(x_5, 0)$ . Poiché la curva di livello non passa per nessun punto di equilibrio, allora esiste una sola orbita periodica coincidente con la curva di livello stessa. I punti  $x_1^E$  e  $x_2^E$  sono i punti di inversione del moto periodico.

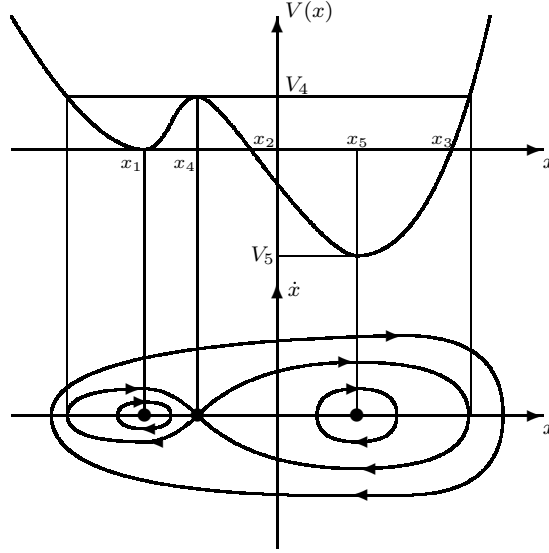


Fig. 3.6: Grafico dell'energia potenziale e curve di livello.

- $E = 0$ : le soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ , ovvero  $V(x) = 0$  sono i tre punti  $x_1, x_2$  e  $x_3$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è  $\mathcal{I}_E = [x_2, x_3] \cup \{x_1\}$ . La curva di livello,  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq x \leq x_3, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\} \cup \{(x_1, 0)\}$ , consta di due parti: una curva chiusa e regolare attorno a  $(x_5, 0)$  ed il punto isolato  $(x_1, 0)$ . Sulla curva  $\Gamma_E$  giacciono due orbite: il punto fisso stabile  $x(t) = x_1$  ed un moto periodico con punti di inversione  $x_2$  e  $x_3$ .
- $0 < E < V_4$ : denoto con  $x_1^E < x_2^E < x_3^E < x_4^E$  le quattro soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ ; si ha  $x_1^E < x_1 < x_2^E < x_3^E < x_5 < x_4^E$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è l'unione di due intervalli disgiunti:  $\mathcal{I}_E = [x_1^E, x_2^E] \cup [x_3^E, x_4^E]$ . La curva di livello,  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_1^E \leq x \leq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\} \cup \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_3^E \leq x \leq x_4^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ , consta di due curve chiuse e regolari, disgiunte e contenenti nel loro interno rispettivamente i punti  $(x_1, 0)$  e  $(x_5, 0)$ . Su ognuna delle componenti connesse di  $\Gamma_E$  giace un'orbita periodica. L'orbita che ruota attorno a  $(x_1, 0)$  ha  $x_1^E$  e  $x_2^E$  come punti di inversione. L'orbita che ruota attorno a  $(x_5, 0)$  ha  $x_3^E$  e  $x_4^E$  come punti di inversione.
- $E = V_4$ : denoto con  $x_1^E < x_4 < x_2^E$  le tre soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$  ( $V(x) = V_4$ ). L'insieme dei punti accessibili al moto è l'intervallo:  $\mathcal{I}_E = [x_1^E, x_2^E]$ . Il punto  $x_4$  è un minimo del potenziale, quindi è un punto di equilibrio instabile. La curva di livello è la separatrice e consta di tre parti:  $\Gamma_E = \Gamma_E^1 \cup \Gamma_E^2 \cup \Gamma_E^3$ , ove  $\Gamma_E^1 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_1^E \leq x < x_4, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ ,  $\Gamma_E^2 = \{(x_4, 0)\}$  e  $\Gamma_E^3 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_4 < x \leq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ . Su  $\Gamma_E^1$  e  $\Gamma_E^3$  giacciono due orbite asintotiche omocliniche, mentre su  $\Gamma_E^2$  giace l'orbita corrispondente al punto di equilibrio instabile  $x(t) = x_4$ .
- $E > V_4$ : denoto con  $x_1^E < x_2^E$  le due soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è l'intervallo  $\mathcal{I}_E = [x_1^E, x_2^E]$ . La curva di livello  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_1^E \leq x \leq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$  è una curva chiusa e regolare attorno a  $(x_1, 0)$  e  $(x_5, 0)$ . Poiché la curva di livello non passa per nessun punto di equilibrio, allora esiste una sola orbita periodica coincidente con la curva di livello stessa. I punti  $x_1^E$  e  $x_2^E$  sono i punti di inversione del moto periodico.

4. L'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è  $\Pi = \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_{V_4} \cup \{(x_5, 0)\})$ .

5. Considero l'arco di traiettoria su  $\Gamma_{V_4}^1$  con punto iniziale  $x_1^{V_4}$ . L'equazione della curva di livello è  $\dot{x} = \sqrt{2(V_4 - V(x))}$ , quindi il tempo impiegato a raggiungere il punto di ascissa  $x_4 - \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  piccolo, è

$$T_\varepsilon = \int_{x_1^{V_4}}^{x_4 - \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2(V_4 - V(x))}} .$$

Il punto  $x_4$  è uno zero almeno doppio del polinomio  $P(x) := V_4 - V(x)$ , poiché  $P(x_4) = 0$  e  $V'(x_4) = 0$ . Pertanto posso scrivere  $V_4 - V(x) = (x - x_4)^2(ax^2 + bx + c)$  con opportuni  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Si ha  $ax^2 + bx + c \geq 0$  per  $x \in [x_1^{V_4}, x_4]$  e inoltre è, ovviamente, limitato nello stesso intervallo chiuso e limitato; quindi esiste un numero reale e positivo  $k$  tale che  $ax^2 + bx + c \leq k$  per  $x \in [x_1^{V_4}, x_4]$ . In conclusione:

$$T_\varepsilon = \int_{x_1^{V_4}}^{x_4 - \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2(V_4 - V(x))}} \geq \int_{x_1^{V_4}}^{x_4 - \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{k(x - x_4)^2}} = \int_{x_1^{V_4}}^{x_4 - \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{k}|x - x_4|} = \int_{x_1^{V_4}}^{x_4 - \varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{k}(x_4 - x)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty .$$

Il moto su  $\Gamma_{V_4}^1$  è, dunque, asintotico.

Studio, adesso, il comportamento della separatrice attorno al punto di equilibrio instabile  $x_4$ . Considero l'arco di equazione  $\dot{x} = \sqrt{2[V_4 - V(x)]}$ , con  $x \geq x_4$ . Pongo  $P(x) := V_4 - V(x) = V_4 - (x^2 - 1)(x + 2)^2$  e sviluppo in serie di Taylor in un intorno di  $x_4$ . Osservo che

$$\begin{aligned} P(x_4) &= 0 \\ P'(x) &= -V'(x) \implies P'(x_4) = 0 \\ P''(x) &= -6(2x^2 + 4x + 1) \implies P''(x_4) = 6(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

Allora si può scrivere:

$$P(x) = \frac{1}{2!}6(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2 + O((x - x_4)^3) = 3(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2 + O((x - x_4)^3)$$

quindi l'equazione dell'arco di separatrice diventa:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{2[3(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2 + O((x - x_4)^3)]} = \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2 \left[1 + \frac{O((x - x_4)^3)}{3(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2}\right]} \\ &= \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)(x - x_4)^2 [1 + O((x - x_4))] } = \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)} |x - x_4| [1 + O((x - x_4))] \\ &= \sqrt{6(\sqrt{3} - 1)} (x - x_4) [1 + O((x - x_4))] \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato  $x \geq x_4$ . Quindi il termine dominante è lineare ed ha pendenza  $\sqrt{6(\sqrt{3} - 1)}$ .

6. In corrispondenza di  $E = 0$  esiste un'orbita periodica con punti di inversione  $x_2 = -1$  e  $x_3 = +1$ , giacente sulla curva di livello di equazione  $\dot{x} = \pm\sqrt{2[0 - V(x)]} = \pm\sqrt{2(1 - x^2)(x + 2)^2} = \pm(x + 2)\sqrt{2(1 - x^2)}$ . Osservato che dall'equazione della curva di livello si ha  $dt = dx/[(x + 2)\sqrt{2(1 - x^2)}]$ , il periodo  $T$  dell'orbita è dato dal seguente integrale definito:

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x + 2)\sqrt{2(1 - x^2)}} \implies T = \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x + 2)\sqrt{1 - x^2}} \quad (3.20)$$

L'integrale (3.20) può essere calcolato esattamente per mezzo di una delle due sostituzioni  $x = \sin \varphi$  oppure  $\sqrt{1 - x^2} = (1 - x)y$ . Si ottiene  $T = \pi\sqrt{6}/3 \simeq 0.81\pi$ . Alternativamente al calcolo diretto, è possibile dare una stima di  $T$  riconducendo il calcolo ad integrali semplici. Osservo che nell'intervallo  $[-1, +1]$  si ha  $1 \leq x + 2 \leq 3$ , allora

$$\sqrt{1 - x^2} \leq (x + 2)\sqrt{1 - x^2} \leq 3\sqrt{1 - x^2} \implies \frac{1}{3\sqrt{1 - x^2}} \leq \frac{1}{(x + 2)\sqrt{1 - x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

e quindi

$$T_- := \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{3\sqrt{1 - x^2}} \leq T \leq \sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} =: T_+ \quad .$$

In modo elementare, sfruttando le proprietà della funzione arcsin, si ha che

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi \quad ,$$

pertanto  $T_- = \sqrt{2}\pi/3 \simeq 0.47\pi$  e  $T_+ = \sqrt{2}\pi \simeq 1.41\pi$ . È possibile migliorare notevolmente le stime suddividendo l'integrale e stimando meglio in ogni intervallo la funzione integranda. Per esempio pongo  $g(x) := (x + 2)\sqrt{1 - x^2}$  e scrivo:

$$\begin{aligned} \frac{T}{\sqrt{2}} &= \int_{-1}^{-\sqrt{3}/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{-\sqrt{3}/2}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{-\sqrt{2}/2}^{-1/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{-1/2}^0 \frac{dx}{g(x)} \\ &\quad + \int_0^{1/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{g(x)} + \int_{\sqrt{3}/2}^{+1} \frac{dx}{g(x)} \quad . \end{aligned}$$

A questo punto osservo che

$$\begin{aligned}
 x+2 \leq 2-\sqrt{3}/2 & \text{ se } -1 \leq x \leq -\sqrt{3}/2, & x+2 \leq 2-\sqrt{2}/2 & \text{ se } -\sqrt{3}/2 \leq x \leq -\sqrt{2}/2 \\
 x+2 \leq 2-1/2 & \text{ se } -\sqrt{2}/2 \leq x \leq -1/2, & x+2 \leq 2 & \text{ se } -1/2 \leq x \leq 0 \\
 x+2 \leq 2+1/2 & \text{ se } 0 \leq x \leq 1/2, & x+2 \leq 2+\sqrt{2}/2 & \text{ se } 1/2 \leq x \leq \sqrt{2}/2 \\
 x+2 \leq 2+\sqrt{3}/2 & \text{ se } \sqrt{2}/2 \leq x \leq \sqrt{3}/2, & x+2 \leq 3 & \text{ se } \sqrt{3}/2 \leq x \leq 1
 \end{aligned}$$

e quindi usando la decomposizione precedente dell'integrale definito che fornisce il periodo si ottiene

$$\begin{aligned}
 T & \geq \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2-\sqrt{3}/2} \left[ -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{2-\sqrt{2}/2} \left[ -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right] + \frac{1}{2-1/2} \left[ -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{1}{2} \left[ 0 + \frac{\pi}{6} \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2+1/2} \left[ \frac{\pi}{6} - 0 \right] + \frac{1}{2+\sqrt{2}/2} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right] + \frac{1}{2+\sqrt{3}/2} \left[ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{1}{3} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right] \right\} \\
 & = \sqrt{2}\pi \left\{ \frac{47}{180} + \frac{2}{21} + \frac{12+\sqrt{3}}{78} \right\} =: T'_- .
 \end{aligned}$$

Si trova  $T'_- \simeq 0.75\pi$ ; quindi la stima dal basso è stata notevolmente migliorata. Analogamente si può procedere per la stima dall'alto; mi limito a dividere l'integrale in due soli pezzi:

$$T = \sqrt{2} \left\{ \int_{-1}^0 \frac{dx}{g(x)} + \int_0^{+1} \frac{dx}{g(x)} \right\}$$

e osservo che  $x+2 \geq 1$  se  $-1 \leq x \leq 0$ , mentre  $x+2 \geq 2$  se  $0 \leq x \leq +1$ . Allora si ha:

$$T \leq \sqrt{2} \left\{ \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{+1} \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}} \right\} = \sqrt{2} \left\{ \left[ 0 + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - 0 \right] \right\} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\pi =: T'_+ ,$$

che migliora la stima dall'alto, infatti  $T'_+ \simeq 1.06\pi$ .

7. Sia  $E$  tale che  $V_5 < E < V_4$ . Dalla discussione precedente si ha che esiste almeno un'orbita periodica. Scelgo l'orbita che ruota attorno a  $x_5$  e denoto con  $a < b$  i due punti di inversione:  $a, b$  dipendono da  $E$ , ma per semplicità ometto questa dipendenza nella notazione. Osservo che  $b > 0$  mentre  $a$  può essere sia positivo che negativo. Dall'equazione  $dx/dt = \sqrt{2[E - V(x)]}$  si ottiene

$$\int_0^{T/2} dt = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2[E - V(x)]}} \implies T = \sqrt{2} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} , \quad (3.21)$$

ove si è definito  $P(x) := E - V(x)$ . Dimostro che l'integrale (3.21) è convergente e quindi che il periodo è finito: si osserva che  $a$  e  $b$  sono zeri del polinomio  $P(x)$ , ma le inequzioni  $P'(a) \neq 0$  e  $P'(b) \neq 0$  implicano che si tratta di due zeri semplici. Allora si può scrivere:

$$P(x) = (x-a)(b-x)(a_1x^2 + a_2x + a_3)$$

con opportuni numeri reali  $a_1, a_2$  e  $a_3$ . Inoltre il trinomio  $a_1x^2 + a_2x + a_3$  è strettamente positivo nell'intervallo  $[a, b]$ . In conclusione la funzione  $\sqrt{P(x)}$  è un infinitesimo di ordine  $1/2$  in  $a$  e in  $b$ , quindi l'integrale (3.21) è convergente.

**Esercizio 3.6 (5.5 in [1])** *Si consideri il sistema meccanico unidimensionale*

$$\ddot{x} + \frac{dV}{dx}(x) = 0 \quad \text{con} \quad V(x) = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4} , \quad (3.22)$$

$x \in \mathbb{R}$ . *Si risponda ai seguenti quesiti: 1. si scriva il principio di conservazione dell'energia. 2. Si studi la funzione energia potenziale e si determinino i punti di equilibrio stabile ed instabile. 3. Si discutano qualitativamente le soluzioni della (3.22) al variare dell'energia totale del sistema. 4. Si determini l'insieme  $\Pi$  dei dati iniziali che generano orbite periodiche. 5. Si dimostri che il dato iniziale  $(x^0, \dot{x}^0) = (\sqrt{2}, 0)$  genera un'orbita periodica. Si scriva il periodo di tale orbita come integrale definito.*

Soluzione 3.6: la (3.22) descrive il moto di una palla di massa  $m = 1$  sottoposta all'azione della forza  $f(x) = -dV(x)/dx = -(4x^2 - 6)/x^7$ .

1. Sia  $E \in \mathbb{R}$  il principio di conservazione dell'energia si scrive

$$H(x, \dot{x}) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4} = E \quad . \quad (3.23)$$

2. La funzione  $V(x)$  è definita su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ed è pari (simmetrica nello scambio  $x \rightarrow -x$ ). Zeri della funzione:  $x_1 = -1$  e  $x_2 = +1$ . Segno della funzione:  $V(x) \geq 0$  se e solo se  $-1 \leq x \leq +1$  e  $x \neq 0$ . Derivata:  $V'(x) = (4x^2 - 6)/x^7$ . Punti estremali:  $x_3 = -\sqrt{3}/2$  e  $x_4 = \sqrt{3}/2$ ;  $x_1$  e  $x_5$  sono punti di minimo. Si osserva che  $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$ . Valore assunto dalla funzione negli estremali:  $V_0 := V(x_3) = V(x_4) = -4/27$ . Infine osservo che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0$ . Si ottiene quindi il grafico in Fig. 3.7. Si osserva che  $x_3$  e  $x_4$  sono punti di equilibrio stabile.

3. Descrizione qualitativa delle soluzioni della (3.22). Considero i seguenti intervalli di energia.

- $E < V_0$ :  $V_0$  è il minimo assoluto della funzione  $V(x)$ , quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha  $E - V(x) < 0$ . Non esiste moto,  $\mathcal{I}_E = \emptyset$ .
- $E = V_0$ : i punti  $x_3$  e  $x_4$  sono gli unici punti tali che  $E - V(x) \geq 0$ , allora  $\mathcal{I}_E = \{x_3, x_4\}$ . La curva di livello è costituita da due punti:  $\Gamma_E = \{(x_3, 0), (x_4, 0)\}$ . Le uniche soluzioni di (3.22) sono i punti di equilibrio stabile  $x(t) = x_3$  e  $x(t) = x_4$ .
- $V_0 < E < 0$ : denoto con  $x_1^E < x_2^E < x_3^E < x_4^E$  le quattro soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è  $\mathcal{I}_E = [x_1^E, x_2^E] \cup [x_3^E, x_4^E]$ . La curva di livello,  $\Gamma_E = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_1^E \leq x \leq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\} \cup \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x_3^E \leq x \leq x_4^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ , consta di due curve chiuse e regolari, disgiunte e contenenti nel loro interno rispettivamente i punti  $(x_3, 0)$  e  $(x_4, 0)$ . Su ognuna delle componenti connesse di  $\Gamma_E$  giace un'orbita periodica. L'orbita che ruota attorno a  $(x_3, 0)$  ha  $x_1^E$  e  $x_2^E$  come punti di inversione. L'orbita che ruota attorno a  $(x_4, 0)$  ha  $x_3^E$  e  $x_4^E$  come punti di inversione.
- $E = 0$ :  $x_1 = -1$  e  $x_2 = +1$  sono le due soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$  ( $V(x) = 0$ ). L'insieme dei punti accessibili al moto è  $\mathcal{I}_E = (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$ . La curva di livello consta di due componenti aperte e disgiunte:  $\Gamma_E = \Gamma_E^1 \cup \Gamma_E^2$  ove  $\Gamma_E^1 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x < x_1, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$  e  $\Gamma_E^2 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \geq x_2, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ . Su  $\Gamma_E^1$  e  $\Gamma_E^2$  giacciono due orbite asintotiche omocliniche rispettivamente a  $(-\infty, 0)$  e  $(+\infty, 0)$ . Si osserva che le particelle si avvicinano all'infinito con velocità nulla, infatti  $\dot{x} = \pm\sqrt{2[E - V(x)]} = \pm\sqrt{-2V(x)} \rightarrow 0$  nel limite  $x \rightarrow \pm\infty$ . In altri termini: le curve di livello si avvicinano asintoticamente a zero.
- $E > 0$ : denoto con  $x_1^E$  e  $x_2^E$  le due soluzioni dell'equazione  $E - V(x) = 0$ . L'insieme dei punti accessibili al moto è  $\mathcal{I}_E = (-\infty, x_1^E] \cup [x_2^E, \infty)$ . La curva di livello consta di due componenti aperte e disgiunte:  $\Gamma_E = \Gamma_E^1 \cup \Gamma_E^2$  ove  $\Gamma_E^1 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x < x_1^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$  e  $\Gamma_E^2 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \geq x_2^E, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\}$ . Su  $\Gamma_E^1$  e  $\Gamma_E^2$  giacciono due orbite asintotiche rispettivamente a  $+\infty$  e  $-\infty$ . Si osserva che le particelle si avvicinano all'infinito con velocità finita, infatti  $\dot{x} = \pm\sqrt{2[E - V(x)]} \rightarrow \pm\sqrt{2E}$  nel limite  $x \rightarrow \pm\infty$ . In altri termini: le curve di livello hanno un asintoto orizzontale.

4. L'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche è

$$\Pi = \{(x^0, \dot{x}^0) \in \mathbb{R}^2 : V_0 < H(x^0, \dot{x}^0) = \frac{1}{2}(\dot{x}^0)^2 + V(x^0) < 0\} \quad .$$

5. Considero il punto  $P_0 = (\sqrt{2}, 0)$  e osservo che  $H(P_0) = 0^2/2 + V(\sqrt{2}) = -1/8$ . Pertanto i risultati del punto precedente e l'osservazione  $V_0 < -1/8 < 0$  implicano che il punto  $P_0$  origina un'orbita periodica. Risolvendo l'equazione  $V(x) = -1/8$  si ottengono i punti di inversione del moto  $\hat{x}_1 = \sqrt{\sqrt{5}-1} < \hat{x}_2 = \sqrt{2}$ . Infatti,  $V(x) = -1/8$  è equivalente a  $x^6 - 8x^2 + 8 = 0$ ; da quest'ultima si ottiene  $(x-2)^2(x^4 + 2x^2 - 4) = 0$  utilizzando il metodo di Ruffini oppure osservando che

$$\begin{aligned} x^6 - 8x^2 + 8 &= x^6 - 8x^2 + 16 - 8 = x^6 - 8 - 8(x^2 - 2) = (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4) - 8(x^2 - 2) \\ &= (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4 - 8) = (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 - 4) \end{aligned} \quad .$$

Infine si ottengono le soluzioni  $\hat{x}_1$  e  $\hat{x}_2$ . Dall'equazione  $dx/dt = \sqrt{2[E - V(x)]}$  si ottiene

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{\sqrt{\sqrt{5}-1}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\left[\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} - \frac{1}{8}\right]}} \implies T = 4 \int_{\sqrt{\sqrt{5}-1}}^{\sqrt{2}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{-x^6 + 8x^2 - 8}} \quad .$$



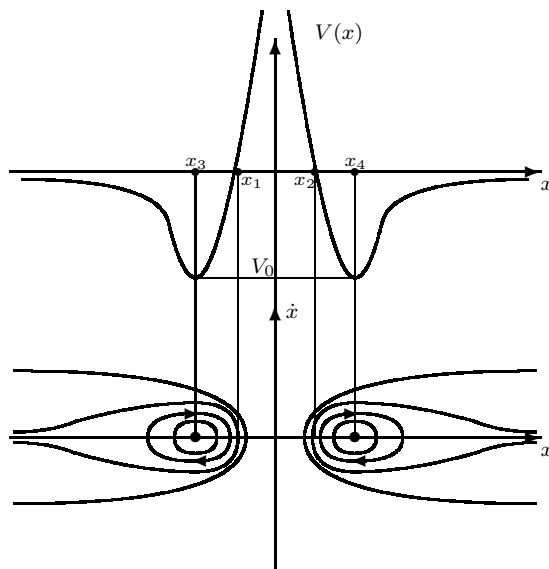


Fig. 3.7: Grafico dell'energia potenziale e curve di livello. I versi di percorrenza sono gli stessi su tutte le curve di livello.

**Esercizio 3.7** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} + \frac{dV}{dx}(x) = 0 \quad \text{con} \quad V(x) = 1 - \cos x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} . \quad (3.24)$$

Si dimostra che se la particella ha energia totale  $E = 1$  allora esiste un'orbita periodica con punti di inversione  $x_1 = -\pi/2$  e  $x_2 = \pi/2$ : se ne scriva il periodo come integrale definito e se ne dia una stima.

Soluzione 3.7: dal principio di conservazione dell'energia si ottiene  $\dot{x} = \pm\sqrt{2[E - V(x)]}$ . Pertanto, lungo l'orbita con energia  $E = 1$ , si ha  $\dot{x} = \pm\sqrt{2 \cos x}$ . Integrando la precedente si ottiene:

$$\int_0^{T/2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{2 \cos x}} \implies \frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} \implies T = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$$

ove nell'ultima implicazione si è utilizzata la parità della funzione coseno. Per stimare l'integrale possiamo riscriverlo utilizzando le formule parametriche  $\cos x = (1 - \tan^2(x/2))/(1 + \tan^2(x/2))$ :

$$T = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} dx \sqrt{\frac{1 + \tan^2(x/2)}{1 - \tan^2(x/2)}} = 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+t^2)(1-t^2)}}$$

con l'ultimo integrale ottenuto per mezzo della sostituzione  $t = \tan(x/2)$ . A questo punto si può osservare che nell'intervallo  $0 \leq t \leq 1$  si ha  $1 \leq 1 + t^2 \leq 2$ , quindi si ottengono le stime

$$T_- := 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2(1-t^2)}} \leq T \leq 4\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} =: T_+$$

e quindi  $T_- = 2\pi$  e  $T_+ = 2\sqrt{2}\pi$ . Infine, posto  $T_M := (T_- + T_+)/2 = \pi(1 + \sqrt{2})$  e  $\Delta T := T_+ - T_- = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$  si ha l'errore relativo:

$$\frac{\Delta T}{T_M} = \frac{2\pi(\sqrt{2} - 1)}{\pi(\sqrt{2} + 1)} = 0.343 .$$

È possibile stimare dall'alto il periodo in modo alternativo agendo sull'integrale di partenza: nell'intervallo  $0 \leq x \leq \pi/2$  si ha  $\cos x \geq 1 - 2x/\pi$ . Quindi si ottiene la nuova stima:

$$T'_+ = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x/\pi}} = 2\frac{\pi}{2}\sqrt{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = 2\pi\sqrt{2} .$$

Osservo che  $T'_+ = \sqrt{2}T_+$ , quindi la nuova stima è decisamente peggiore della precedente.

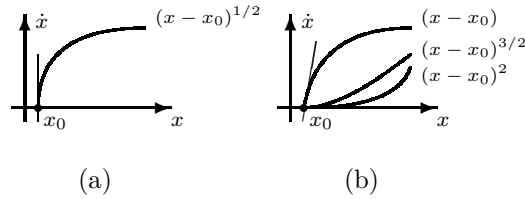


Fig. 3.8: Comportamento asintotico di una curva di livello (a) e di una separatrice (b).

**Esercizio 3.8** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale  $\ddot{x} + dV/dx = 0$  con  $V(x)$  di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}$ .  
 1. Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale che la curva di livello con energia  $V_0 := V(x_0)$  è chiusa, regolare e definita in  $[x_0, x_1]$  per  $x_1 > x_0$  opportuno. Si studi il comportamento della curva di livello in un intorno di  $x_0$ .  
 2. Sia  $x_0$  un punto di massimo relativo per  $V(x)$ . Si studi il comportamento della separatrice in un intorno di  $x_0$  (si veda anche il punto 5 dell'Esercizio 3.5).

Soluzione 3.8: 1. dal principio di conservazione dell'energia si ha che l'equazione dell'arco di curva di livello nel semipiano  $\dot{x} \geq 0$  è  $\dot{x} = \sqrt{2[V_0 - V(x)]}$ . Pongo  $P(x) = 2[V_0 - V(x)]$  ed osservo che

- $P'(x) = -2V'(x)$ .
- $P(x_0) = 0$  e  $P'(x_0) \neq 0$ ,

infatti  $V(x_0) = V_0$  e  $x_0$  non è un punto estremale di  $V(x)$ . Scrivo lo sviluppo in serie di Taylor di  $P(x)$  in un intorno destro di  $x_0$ :

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}P''(x_0)(x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \quad (3.25)$$

Poiché la derivata prima della funzione  $P(x)$  non si annulla in  $x_0$  posso arrestare lo sviluppo al primo ordine e scrivere

$$\begin{aligned} P(x) &= P'(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2) = P'(x_0)(x - x_0) \left[ 1 + \frac{O((x - x_0)^2)}{P'(x_0)(x - x_0)} \right] \\ &= P'(x_0)(x - x_0) [1 + O(x - x_0)] \quad . \end{aligned}$$

Quindi per la curva di livello ottengo:

$$\dot{x} = \sqrt{P(x)} = \sqrt{P'(x_0)(x - x_0) [1 + O(x - x_0)]} = \sqrt{P'(x_0)(x - x_0)^{1/2}} [1 + O(x - x_0)] \quad .$$

Conclusione: la curva di livello in un intorno piccolo di  $x_0$  è ben approssimata dalla radice quadrata di  $x - x_0$  (si veda la Fig 3.8(a)), in particolare ha tangente verticale.

2. Lo studio procede come al punto precedente, ma in questo caso  $P'(x_0) = 0$  perché  $x_0$  è un punto di massimo per il potenziale  $V(x)$ . Allora non ha senso arrestare lo sviluppo (3.25) al primo ordine, devo considerare le derivate successive. Alcuni casi:

- se  $P''(x_0) \neq 0$ , allora arresto lo sviluppo al secondo ordine ed ottengo

$$P(x) = \frac{1}{2!}P''(x_0)(x - x_0)^2 [1 + O(x - x_0)] \implies \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{2!}P''(x_0)(x - x_0)^2} [1 + O(x - x_0)] \quad .$$

La separatrice è ben approssimata da una retta di pendenza  $\sqrt{P''(x_0)/2!}$  in un intorno piccolo di  $x_0$  (si veda la Fig. 3.8(b)).

- Se  $P''(x_0) = 0$  e  $P'''(x_0) \neq 0$ , allora arresto lo sviluppo al terzo ordine ed ottengo

$$P(x) = \frac{1}{3!}P'''(x_0)(x - x_0)^3 [1 + O(x - x_0)] \implies \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{3!}P'''(x_0)(x - x_0)^3} [1 + O(x - x_0)] \quad .$$

La separatrice è ben approssimata dalla curva  $\sqrt{P'''(x_0)/3!}(x - x_0)^{3/2}$  in un intorno piccolo di  $x_0$ . La separatrice ha tangente orizzontale (si veda la Fig. 3.8(b)).

- Se  $P''(x_0) = P'''(x_0) = 0$  e  $P''''(x_0) \neq 0$ , allora arresto lo sviluppo al quarto ordine ed ottengo

$$P(x) = \frac{1}{4!}P''''(x_0)(x - x_0)^4 [1 + O(x - x_0)] \implies \dot{x} = \sqrt{\frac{1}{4!}P''''(x_0)(x - x_0)^4} [1 + O(x - x_0)] \quad .$$

La separatrice è ben approssimata dalla parabola  $\sqrt{P''''(x_0)/4!}(x - x_0)^2$  in un intorno piccolo di  $x_0$ . La separatrice ha tangente orizzontale (si veda la Fig. 3.8(b)).

#### 4. Moti centrali.

Si consideri una particella di massa  $\mu$  che si muove in  $\mathbb{R}^3$  sottoposta all'azione di una forza conservativa  $\vec{f}(\vec{r})$ , con  $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , derivante da un potenziale centrale  $V(r)$ , con  $r = |\vec{r}|$ . L'equazione del moto si scrive:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}(r) \quad \text{ove} \quad \vec{f}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{d}{dr} V(r) \quad . \quad (4.1)$$

Si dimostra che il momento angolare della particella  $\vec{L} := \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  è una costante del moto. Il moto è quindi planare e si svolge in un piano ortogonale a  $\vec{L}$  e passante per l'origine. Se su questo piano si definiscono le coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ , allora si ha che le equazioni del moto assumono la forma

$$\begin{cases} \mu \ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho} V_{\text{eff}}(\rho) \\ \dot{\theta} = \frac{L}{\mu \rho^2} \end{cases} \quad (4.2)$$

ove  $L \in \mathbb{R}$  è la componente del momento angolare lungo l'asse ortogonale al piano su cui si svolge il moto e  $V_{\text{eff}}$  è il potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) := V(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad . \quad (4.3)$$

Alcuni commenti:

- il moto radiale della particella è stato ricondotto al moto unidimensionale di una particella di massa  $\mu$  sottoposta all'azione di una forza derivante dal potenziale  $V_{\text{eff}}$ .
- Il moto angolare è integrabile se è nota la soluzione dell'equazione radiale. Formalmente:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t ds \frac{L}{\mu \rho^2(s)} \quad .$$

Si può osservare che  $\dot{\theta}$  ha segno definito ed uguale a quello di  $L$ , quindi la particella ruota attorno all'origine sempre nello stesso verso.

- Se  $L \neq 0$ , l'equazione dell'orbita  $\rho = \rho(\theta)$  è soluzione delle due seguenti equazioni differenziali, note rispettivamente come prima e seconda forma dell'orbita:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu \rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V_{\text{eff}}(\rho)]} \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[ V_{\text{eff}} \left( \frac{1}{u} \right) \right] \quad , \quad (4.4)$$

ove  $u = 1/\rho$ .

**Esercizio 4.1** Si consideri una particella di massa  $\mu$  sottoposta all'azione di una forza centrale di potenziale

$$V(r) = \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{6} r^6 \quad . \quad (4.5)$$

1. Si scrivano le equazioni del moto ed il principio di conservazione dell'energia. 2. Si disegni il grafico del potenziale efficace. 3. Si discuta qualitativamente il moto della particella e si dimostri che se il momento angolare  $L$  è abbastanza piccolo allora esistono due moti circolari uniformi. Se ne determinino i periodi  $T_1$  e  $T_2 < T_1$ . 4. Sia  $\rho_1$  il raggio dell'orbita con periodo  $T_1$ . Si studi il moto della particella con momento angolare  $L$  posta in  $\rho(0) = \rho_1$  con velocità radiale iniziale  $\dot{r}(0) = \sqrt{2\varepsilon/\mu}$ , con  $\varepsilon > 0$  piccolo. 5. Si ponga e si studi il problema analogo al caso 4 per l'orbita di periodo  $T_2$ .

Soluzione 4.1: 1. il moto su un piano ortogonale a  $\vec{L}$  viene descritto in termini delle coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ . Si considera il potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} = \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad . \quad (4.6)$$

Usando (4.2) si ottengono le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \mu \ddot{\rho} = -\rho + \rho^5 + \frac{L^2}{\mu \rho^3} \\ \dot{\theta} = \frac{L}{\mu \rho^2} \end{cases} \quad . \quad (4.7)$$

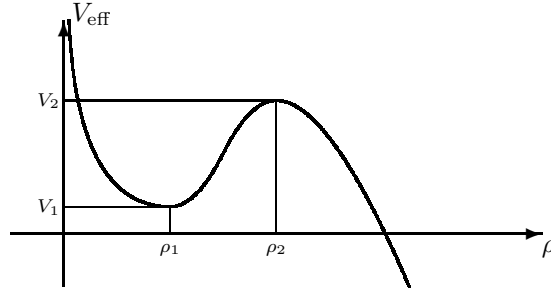


Fig. 4.1: Grafico del potenziale efficace.

Sia  $E \in \mathbb{R}$ , il principio di conservazione dell'energia si scrive come segue:

$$E = \frac{1}{2\mu}\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}} = \frac{1}{2\mu}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^6 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad (4.8)$$

2. Studio la funzione potenziale efficace: osservo che  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$ . Calcolo la derivata prima:  $V'_{\text{eff}} = \rho - \rho^5 - L^2/\mu\rho^3$ . L'equazione  $V'_{\text{eff}} = 0$  non ha soluzioni reali se  $L^2 > \mu/4$ , mentre ne ha due distinte

$$0 < \rho_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{L^2}{\mu}}} < \rho_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{L^2}{\mu}}}$$

nel caso  $L^2 < \mu/4$ . Il caso  $L^2 > \mu/4$  è semplice, studio in dettaglio il caso interessante  $L^2 < \mu/4$ . I punti estremali  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sono rispettivamente un punto di minimo e di massimo. Si pone  $V_1 := V_{\text{eff}}(\rho_1)$ ,  $V_2 := V_{\text{eff}}(\rho_2)$  e si trova

$$0 < V_1 = \frac{1}{6\mu\rho_1^2} \left[ \mu + 4L^2 - \sqrt{\mu(\mu - 4L^2)} \right] < V_2 = \frac{1}{6\mu\rho_1^2} \left[ \mu + 4L^2 + \sqrt{\mu(\mu - 4L^2)} \right] \quad .$$

Il grafico del potenziale efficace è rappresentato in Fig. 4.1.

3. Descrizione qualitativa delle soluzioni delle equazioni (4.7). Studio l'equazione radiale ed ottengo informazioni sul moto della palla  $\mu$ . Considero i seguenti intervalli di energia:

- $E < V_1$ : denoto con  $\rho^E$  la sola soluzione dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Il moto è ammissibile nella regione  $\rho \geq \rho^E$ . Esiste un'orbita illimitata.
- $E = V_1$ : le due soluzioni dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$  sono  $\rho_1$  e  $\rho^E > \rho_1$ . Il moto è ammissibile nella regione  $\{\rho_1\} \cup [\rho^E, +\infty)$ . Esiste un'orbita illimitata ed un'orbita a distanza fissa dall'origine:  $\rho(t) = \rho_1$ . Quindi esiste un moto circolare. Per il moto circolare posso scrivere l'equazione radiale:  $\dot{\theta} = L/(\mu\rho^2(t)) = L/(\mu\rho_1^2)$ . Quindi la velocità angolare è costante: il moto è circolare uniforme. Infine, il periodo del moto è  $T_1 = 2\pi/\dot{\theta} = 2\pi\mu\rho_1^2/L$ .
- $V_1 < E < V_2$ : denoto con  $\rho_1^E < \rho_2^E < \rho_3^E$  le tre soluzioni dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Il moto è ammissibile nella regione  $[\rho_1^E, \rho_2^E] \cup [\rho_3^E, +\infty)$ . Esiste un'orbita illimitata che si svolge nella regione  $\rho \geq \rho_3^E$  ed un'orbita limitata che si svolge nella corona circolare di raggio interno  $\rho_1^E$  e raggio esterno  $\rho_2^E$ .
- $E = V_2$ : le due soluzioni dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$  sono  $\rho_2$  e  $\rho^E < \rho_2$ . Il moto è ammissibile nella regione  $[\rho^E, +\infty)$ . Esistono due orbite illimitate ed asintotiche a  $\rho_2$ , un'orbita limitata che si svolge nella corona circolare di raggi  $\rho^E$  e  $\rho_2$  e che è asintotica a  $\rho_2$ . Infine esiste un'orbita a distanza fissa dall'origine:  $\rho(t) = \rho_2$ . Quindi esiste un moto circolare. Per il moto circolare posso scrivere l'equazione radiale:  $\dot{\theta} = L/(\mu\rho^2(t)) = L/(\mu\rho_2^2)$ . Quindi la velocità angolare è costante: il moto è circolare uniforme. Infine, il periodo del moto è  $T_2 = 2\pi/\dot{\theta} = 2\pi\mu\rho_2^2/L$ .
- $E > V_2$ : denoto con  $\rho^E$  la sola soluzione dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Il moto è ammissibile nella regione  $\rho \geq \rho^E$ . Esiste un'orbita illimitata.

4. Fissato il momento angolare  $L$  della particella, l'orbita circolare uniforme  $\rho(t) = \rho_1$  è ottenuta con una condizione iniziale  $\rho(0) = \rho_1$ ,  $\dot{\rho}(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = L/(\mu\rho_1^2)$  e  $\theta(0)$  arbitrario (per esempio  $\theta(0) = 0$ ). In altri termini la particella viene posta a distanza  $\rho_1$  dall'origine e viene lanciata con velocità angolare  $\dot{\theta}(0) = L/(\mu\rho_1^2)$  tangenzialmente alla circonferenza di raggio  $\rho_1$  centrata nell'origine (Fig. 4.2a). Ora si considera la medesima

condizione iniziale, ma con una piccola velocità radiale  $\dot{\rho}(0) = \sqrt{2\varepsilon/\mu}$  (Fig. 4.2b). Osservo che l'energia radiale della particella è

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2(0) + V_{\text{eff}}(\rho_1) = V_1 + \varepsilon > V_1 \quad ,$$

quindi l'orbita non è circolare, ma si sviluppa all'interno di una corona circolare di raggi  $\rho_1(\varepsilon) < \rho_2(\varepsilon)$ . Mi pongo il problema di descrivere l'orbita della particella per piccoli valori di  $\varepsilon$  (al primo ordine in  $\varepsilon$ ).

In primo luogo determino i due raggi  $\rho_1(\varepsilon) < \rho_2(\varepsilon)$ : devo risolvere l'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Pongo  $\rho = \rho_1 + \delta$  con  $\delta \in \mathbb{R}$  piccolo e risolvo l'equazione sviluppandola al secondo ordine in  $\delta$ .

$$E - V_{\text{eff}}(\rho_1 + \delta) = 0 \implies V_1 + \varepsilon - \frac{1}{2}(\rho_1 + \delta)^2 + \frac{1}{6}(\rho_1 + \delta)^6 - \frac{L^2}{2\mu\rho_1^2(1 + \frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{\delta^2}{\rho_1^2})^2} = 0 \quad .$$

Troncando lo sviluppo delle potenze dei binomi e della serie geometrica al secondo ordine in  $\delta$  si ha:

$$V_1 + \varepsilon - \frac{1}{2}(\rho_1^2 + 2\delta\rho_1) + \frac{1}{6}(\rho_1^6 + 6\delta\rho_1^5) - \frac{L^2}{2\mu\rho_1^2} \left[ 1 - \left( \frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{\delta^2}{\rho_1^2} \right) + \left( \frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{\delta^2}{\rho_1^2} \right)^2 \right] = 0 \quad .$$

Arrestando lo sviluppo del termine in parentesi quadre al secondo ordine in  $\delta$  si ha:

$$V_1 + \varepsilon - \frac{1}{2}(\rho_1^2 + 2\delta\rho_1) + \frac{1}{6}(\rho_1^6 + 6\delta\rho_1^5) - \frac{L^2}{2\mu\rho_1^2} \left[ 1 - \frac{2\delta}{\rho_1} + \frac{3\delta^2}{\rho_1^2} \right] = 0 \quad .$$

A questo punto si osserva che i termini non dipendenti da  $\delta$  ricostruiscono  $-V_{\text{eff}}(\rho_1) = -V_1$  ed i coefficienti dei termini lineari in  $\delta$  ricostruiscono  $-V'_{\text{eff}}(\rho_1) = 0$ , quindi l'equazione si semplifica notevolmente e si ottiene

$$\varepsilon - \frac{1}{2\mu\rho_1^4}\delta^2(\mu\rho_1^4 - 5\mu\rho_1^8 + 3L^2) = 0 \implies \delta = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} \quad ,$$

ove si è posto  $A = (\mu\rho_1^4 - 5\mu\rho_1^8 + 3L^2)/2\mu\rho_1^4 > 0$ . In conclusione se la particella con energia  $V_1 + \varepsilon$  viene posta all'istante iniziale in  $\rho(0) = \rho_1$ , allora essa avrà un'orbita limitata che si svolge all'interno della corona circolare di raggi

$$\rho_1(\varepsilon) = \rho_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} < \rho_2(\varepsilon) = \rho_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} \quad .$$

Determinazione della legge oraria radiale al primo ordine in  $\varepsilon$ : devo integrare l'equazione che si ottiene dal principio di conservazione dell'energia  $E = \mu\dot{\rho}^2/2 + V_{\text{eff}}(\rho)$ . Poiché  $\rho_1(\varepsilon) < \rho < \rho_2(\varepsilon)$  sviluppare l'equazione precedente al primo ordine in  $\varepsilon$  vuol dire arrestare lo sviluppo di  $V_{\text{eff}}(\rho)$  in  $\rho - \rho_1$  al secondo ordine. Quindi:

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V_{\text{eff}}(\rho_1) + V'_{\text{eff}}(\rho)(\rho - \rho_1) + \frac{1}{2}V''_{\text{eff}}(\rho_1)(\rho - \rho_1)^2 + O((\rho - \rho_1)^3) = V_1 + A(\rho - \rho_1)^2 + O((\rho - \rho_1)^3) \quad .$$

Sostituendo nel principio di conservazione dell'energia si ottiene l'equazione differenziale

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{\mu} [\varepsilon - A(\rho - \rho_1)^2]$$

che può essere integrata con condizione iniziale  $\rho(0) = \rho_1$  per ottenere

$$\rho(t) = \rho_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon}{A}} \sin \left( \sqrt{\frac{2A}{\mu}} t \right) \quad .$$

Pertanto durante la rivoluzione attorno all'origine, la particella compie radialmente oscillazioni di periodo  $T_{\text{osc}} = 2\pi\sqrt{\mu/2A}$  ed ampiezza  $\sqrt{\varepsilon/A}$ . È interessante osservare che se il periodo di rivoluzione viene approssimato con  $T_1$  allora

$$\frac{T_{\text{osc}}}{T_{\text{riv}}} \simeq \sqrt{\frac{L^2}{\mu\rho_1^4 - 5\mu\rho_1^8 + 3L^2}}$$

che è una funzione strettamente crescente da  $1/2$  a  $+\infty$  nell'intervallo  $0 \leq L < \sqrt{\mu/4}$ . quindi il periodo di oscillazione è la metà di quello di rivoluzione per  $L \rightarrow 0$ , mentre è molto maggior di quello di rivoluzione per  $L$  grande. In altri termini: la nuova condizione iniziale perturba poco il moto circolare uniforme se  $L$  è grande, mentre lo perturba pesantemente se  $L$  è piccolo.

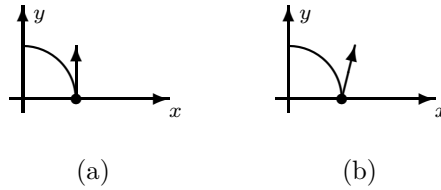


Fig. 4.2: Condizioni iniziali: (a) per l'orbita circolare; (b) per una piccola deviazione dall'orbita circolare.

5. Fissato il momento angolare  $L \neq 0$  considero la condizione iniziale  $\rho(0) = \rho_2$ ,  $\dot{\theta}(0) = L/\mu\rho_2^2$  e  $\dot{\rho}(0) = \sqrt{2\varepsilon/\mu}$ . Si verifica facilmente che l'energia totale radiale è  $E = V_2 + \varepsilon$ . Allora l'orbita della particella è illimitata e la particella si allontana indefinitamente da  $\rho(0) = \rho_1$ . È possibile stimare in modo molto "rozzo" la legge oraria radiale:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho) \implies \dot{\rho}^2 = \frac{2}{\mu} [E - V_{\text{eff}}(\rho)] = \frac{2}{\mu} [V_2 + \varepsilon - V_{\text{eff}}(\rho)] \geq \frac{2}{\mu} [V_2 + \varepsilon - V_{\text{eff}}(\rho_2)] = \frac{2\varepsilon}{\mu} ,$$

da cui si ottiene  $\rho(t) \geq \rho_1 + \sqrt{2\varepsilon/\mu}t$ .

**Esercizio 4.2** Si consideri una particella di massa  $\mu$  sottoposta all'azione di una forza centrale di potenziale

$$V(r) = \kappa r^2 + \frac{\alpha}{r^2} , \quad (4.9)$$

con  $\kappa > 0$ . 1. Si scrivano le equazioni del moto ed il principio di conservazione dell'energia. 2. Si disegni il grafico del potenziale efficace nel caso  $\gamma := 1 + 2\mu\alpha/L^2 > 0$ . 3. Si discuta qualitativamente il moto della particella e si dimostri che esiste un moto circolare uniforme di raggio  $\rho_0$ . Se ne determinini il periodo  $T_0$ . 4. Sia  $V_0 = V_{\text{eff}}(\rho_0)$ : si scriva l'equazione dell'orbita per moti con energia  $E > V_0$ . 5. Si dica per quali valori di  $\alpha$  l'orbita determinata al punto 4 è chiusa.

Soluzione 4.2: si veda la soluzione di [1] per il moto armonico in tre dimensioni.

## Bibliografia

- [1] G. Gentile, *Dispense per il corso* (1999).

## Elenco delle figure

3.1	Curve di livello per il moto armonico . . . . .	19
3.2	Curve di livello per il potenziale quartico . . . . .	21
3.3	Curve di livello per il sistema dinamico (3.11) . . . . .	23
3.4	Curve di livello per il pendolo rotante . . . . .	26
3.5	Curve di livello per il pendolo rotante . . . . .	27
3.6	Energia potenziale e curve di livello Esercizio 3.5 . . . . .	29
3.7	Energia potenziale e curve di livello Esercizio 3.6 . . . . .	33
3.8	Comportamento asintotico di una curva di livello . . . . .	34
4.1	Potenziale efficace per l'Esercizio 4.1 . . . . .	36
4.2	Condizioni iniziali per l'Esercizio 4.1 . . . . .	38