

Complementi sulla forma canonica di Jordan

In questa nota, facendo riferimento per definizioni e notazioni al Capitolo 1 di *Introduzione ai sistemi dinamici* del Prof. Guido Gentile (d'ora in poi citato come [G]), vogliamo enunciare alcuni risultati ed esporre alcuni esempi sulla forma canonica di Jordan di una matrice A $n \times n$. Penseremo A come la matrice associata ad un operatore lineare T su \mathbb{R}^n nella base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$: $A_{ij} = (Te_j)_i$.

Supponiamo che lo spettro di T (i.e. l'insieme delle n radici del polinomio caratteristico $p_n(\lambda)$ associato a T) contenga l'autovalore λ_1 n_1 volte, l'autovalore λ_2 n_2 volte, ..., l'autovalore λ_m n_m volte. Naturalmente $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. E' noto (vedi [G]) che \mathbb{R}^n puo' essere scritto come somma diretta dei sottospazi $E(T, \lambda_i) = \ker(T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i}$, $i = 1, \dots, m$, e che, se $T_i = T|_{E(T, \lambda_i)}$ e' la restrizione di T al sottospazio $E(T, \lambda_i)$, T puo' essere scritto come la somma diretta dei T_i : $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_m$. In altre parole se scegliamo una base $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ tale che: i primi n_1 vettori $\{f_1, \dots, f_{n_1}\}$ siano una base di $E(T, \lambda_1)$, i successivi n_2 vettori $\{f_{n_1+1}, \dots, f_{n_1+n_2}\}$ siano una base di $E(T, \lambda_2)$, e cosi' via, la matrice B che rappresenta T nella base \mathcal{F} e' diagonale a blocchi.

Restringiamoci allora ad uno dei sottospazi $E(T, \lambda_i)$ e cerchiamo in questo sottospazio qual e' la base in cui T_i e' rappresentata da una matrice in forma canonica di Jordan. Ricordiamo la definizione di blocco elementare di Jordan e di matrice in forma canonica di Jordan (in una forma lievemente diversa da quella riportata in [G]).

DEFINIZIONE (BLOCCO ELEMENTARE DI JORDAN). Sia $\lambda \in \mathbb{C}$; la matrice $r \times r$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad (0.0)$$

prende il nome di blocco elementare di Jordan di ordine r . Se $r = 1$, $J = \lambda$.

DEFINIZIONE (MATRICE IN FORMA CANONICA DI JORDAN). Una matrice si chiama matrice in forma canonica di Jordan (o in forma normale di Jordan) se e' costituita da blocchi elementari di Jordan.

Per costruire la base di $E(T, \lambda_i)$ in cui T_i e' rappresentata da una matrice in forma canonica di Jordan si puo' procedere nel modo seguente. Si risolve l'equazione $(T - \lambda_i \mathbb{1})v = 0$. In generale si troveranno $k_i \geq 1$ soluzioni indipendenti $g_1^{(1)}, \dots, g_{k_i}^{(1)}$, che chiameremo gli *autovettori propri* dell'operatore T . Consideriamo per primo $g_1^{(1)}$ e risolviamo l'equazione $(T - \lambda_i \mathbb{1})v = g_1^{(1)}$. Se troviamo una soluzione $g_1^{(2)}$, procediamo ancora cercando un vettore v tale che $(T - \lambda_i \mathbb{1})v = g_1^{(2)}$, e cosi' via, fino a che non

troviamo una catena massimale di vettori $\mathcal{C}_1 = \{g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, \dots, g_1^{(m_1^{(i)})}\}$ mandati uno nell'altro dall'operatore $T - \lambda_i \mathbb{1}$:

$$\begin{aligned} (T - \lambda_i \mathbb{1}) g_1^{(1)} &= 0 \\ (T - \lambda_i \mathbb{1}) g_1^{(2)} &= g_1^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ (T - \lambda_i \mathbb{1}) g_1^{(m_1^{(i)})} &= g_1^{(m_1^{(i)}-1)}, \end{aligned} \tag{0.1}$$

Chiamiamo la catena *massimale* se non e' possibile continuarla, ovvero se l'equazione $(T - \lambda_i)v = g_1^{(m_1^{(i)})}$ non ammette soluzione.

Procedendo allo stesso modo per gli autovettori propri $g_2^{(1)}, \dots, g_{k_i}^{(1)}$, costruiamo altre $k_i - 1$ catene massimali di vettori $\mathcal{C}_2 = \{g_2^{(1)}, g_2^{(2)}, \dots, g_2^{(m_2^{(i)})}\}, \dots, \mathcal{C}_{k_i} = \{g_{k_i}^{(1)}, g_{k_i}^{(2)}, \dots, g_{k_i}^{(m_{k_i}^{(i)})}\}$, tutte con le stesse proprieta' di \mathcal{C}_1 .

Siamo allora pronti ad enunciare (senza dimostrazione) il risultato principale esposto in questa nota.

TEOREMA 1 *Sia T_i la restrizione a $E(T, \lambda_i)$ dell'operatore T su \mathbb{R}^n . E' sempre possibile costruire $k_i \geq 1$ catene di vettori $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k_i}$, come descritto sopra. L'unione delle k_i catene costituisce una base $\mathcal{C}^{(i)} = \cup_{j=1}^{k_i} \mathcal{C}_j$ di $E(T, \lambda_i)$ (in particolare la somma delle dimensioni delle catene e' uguale alla dimensione n_i di $E(T, \lambda_i)$: $m_1^{(i)} + m_2^{(i)} + \dots + m_{k_i}^{(i)} = n_i$). Nella base $\mathcal{C}^{(i)}$ l'operatore T_i e' rappresentato da una matrice in forma canonica di Jordan, con k_i blocchi di dimensioni $m_1^{(i)}, \dots, m_{k_i}^{(i)}$, ciascuno dei quali ha l'autovalore λ_i sulla diagonale.*

Mostriamo adesso esplicitamente in due esempi la validita' del Teorema 1.

Esempio 1 Supponiamo che l'operatore T su \mathbb{R}^3 nella base canonica sia rappresentato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare A e'

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4) + (-2\lambda - 4) + 2(2 + \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4) - (2\lambda + 4) + (2\lambda + 4) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4) = (2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 2), \end{aligned} \tag{0.2}$$

così che lo spettro di A e' costituito dagli autovalori

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -2 : \tag{0.3}$$

abbiamo quindi due autovalori distinti $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_3 = -2$ di molteplicita' rispettivamente $n_1 = 2$ e $n_3 = 1$.

Possiamo scrivere $E = \mathbb{R}^3$ come somma diretta

$$\begin{aligned} E &= E_1 \oplus E_2, \\ E_1 &= \ker (A - 2\mathbb{1})^2, \\ E_2 &= \ker (A + 2\mathbb{1}). \end{aligned} \tag{0.4}$$

Cerchiamo una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in E costituita da elementi di due basi: $\{v_1, v_2\}$ in E_1 , con le proprietà descritte sopra (*i.e.* v_1 e v_2 o sono due autovettori propri o formano una catena) e $\{v_3\}$ in E_2 : in tale base l'operatore T sarà rappresentato da una matrice B in forma canonica di Jordan.

Iniziamo a costruire la base $\{v_1, v_2\}$. Cerchiamo le soluzioni (x, y, z) non banali dell'equazione

$$(A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0. \tag{0.5}$$

Si ha

$$(A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \tag{0.6}$$

che fornisce le relazioni

$$-y + 2z = 0, x + y - 2z = 0 \tag{0.7}$$

che, per esempio, ammettono la soluzione $v_1 = (0, 2, 1)$. Vediamo che T_1 ammette un solo autovettore proprio, e quindi cerchiamo v_2 come soluzione dell'equazione:

$$(A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{0.8}$$

che fornisce le relazioni

$$-y + 2z = 0, x + y - 2z = 1 \tag{0.9}$$

che, per esempio, ammettono la soluzione $v_2 = (1, 0, 0)$.

Una base $\{v_3\}$ di E_2 è data dall'autovettore associato all'autovalore $\lambda_3 = -2$, *i.e.* dal vettore di componenti (x, y, z) tali che

$$(A + 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \tag{0.10}$$

da cui si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \end{cases} \tag{0.11}$$

così che la somma delle prime due dà

$$5x + 4z = 0, \quad (0.12)$$

mentre la loro differenza dà

$$3x - 2y = 0, \quad (0.13)$$

quindi una soluzione non banale è (fissando $z = -5$)

$$v_3 = (4, 6, -5). \quad (0.14)$$

Il Teorema 1 ci dice che, nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$, T è rappresentato dalla matrice B nella forma canonica di Jordan:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (0.15)$$

Verifichiamolo esplicitamente.

Si ha

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad (0.16)$$

se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare T è rappresentato dalla matrice A .

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si ha allora

$$y = Qx, \quad Q^{-1} = P^T. \quad (0.17)$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}. \quad (0.18)$$

così che $\det Q = 16$. Si ha quindi

$$Q = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 16 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (0.19)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} B &= Q A Q^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 16 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 & 6 & 20 \\ 32 & -8 & 16 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 32 & 16 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (0.20)$$

come volevasi dimostrare.

Esempio 2 Supponiamo che l'operatore T su \mathbb{R}^2 nella base canonica sia rappresentato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\omega \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico dell'operatore lineare A è

$$p(\lambda) = -\lambda(-2\omega - \lambda) + \omega^2 = \lambda^2 + 2\lambda\omega + \omega^2 = (\lambda + \omega)^2 \quad (0.21)$$

così che lo spettro di A è costituito dai due autovalori coincidenti $\lambda_1, \lambda_2 = -\omega$. Cerchiamo la base $\{v_1, v_2\}$ di \mathbb{R}^2 in cui l'operatore T è rappresentato da una matrice B in forma canonica di Jordan.

Cerchiamo le soluzioni (x, y) non banali dell'equazione

$$(A + \omega\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \quad (0.22)$$

Si ha

$$(A + \omega\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad (0.23)$$

che fornisce la relazione $\omega x + y = 0$ che, per esempio, ammette la soluzione $v_1 = (1, -\omega)$. Vediamo che T ammette un solo autovettore proprio, e quindi cerchiamo v_2 come soluzione dell'equazione:

$$(A + \omega\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad (0.24)$$

che fornisce la relazione $\omega x + y = 1$ che, per esempio, ammette la soluzione $v_2 = (0, 1)$.

Il Teorema 1 ci dice che, nella base $\{v_1, v_2\}$, T è rappresentato dalla matrice B nella forma canonica di Jordan:

$$B = \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}. \quad (0.25)$$

Verifichiamolo esplicitamente.

Si ha

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0.26)$$

se $\{e_1, e_2\}$ è la base standard in cui l'operatore lineare T è rappresentato dalla matrice A .

Siano y le coordinate nella base definita dagli autovettori $\{v_1, v_2\}$. Si ha allora

$$y = Qx, \quad Q^{-1} = P^T. \quad (0.27)$$

Quindi

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}. \quad (0.28)$$

così che $\det Q = 1$. Si ha quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}. \quad (0.29)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} B = QAQ^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (0.30)$$

come volevasi dimostrare.