Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2009/2010

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Il metodo di variazione delle costanti

(Livia Corsi)

Il metodo di variazione delle costanti è una tecnica semplice ma efficace per determinare la soluzione generale di equazioni differenziali lineari non omogenee; di seguito ci occuperemo nel dettaglio del caso particolare di equazioni al second'ordine, e questo sostanzialmente perché è quasi immediato (una volta capito come procedere in questi casi semplici) estendere il metodo anche a ordini di derivazione più alti.

1 Risultati preliminari

Lemma 1.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia $S = S(A)$ l'insieme delle soluzioni del problema*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

al variare del dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora S è un sottospazio vettoriale di $C^\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ isomorfo a $\mathbb{R}^n$, e la derivazione d/dt è un'operatore lineare su S i cui autospazi corrispondono agli autospazi di A.

Dimostrazione. Innanzitutto scriviamo $S = S(A) = \{x(t) = \exp(At)x_0 : x_0 \in \mathbb{R}^n\}$. Chiaramente $S \subset C^\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$; siano quindi $x(t), y(t) \in S$. Allora

$$x(t) + y(t) = \exp(At)x_0 + \exp(At)y_0 = \exp(At)(x_0 + y_0)$$

ovvero $x(t) + y(t) \in S$. Inoltre per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha x(t) = \alpha \exp(At)x_0 = \exp(At)\alpha x_0$ ovvero $\alpha x(t) \in S$ e quindi S è un sottospazio vettoriale di $C^\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Ora, se consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi = \phi_A \ : \mathbb{R}^n &\longrightarrow S \\ x_0 &\longmapsto \exp(At)x_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

notiamo immediatamente che è suriettiva e che

$$\phi(ax_0 + by_0) = \exp(At)(ax_0 + by_0) = a\phi(x_0) + a\phi(y_0)$$

i.e. è lineare. Inoltre $Ker(\phi) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \phi(x_0) = 0\} = \{\mathbf{0}\}$, perciò ϕ è anche iniettiva. Quindi si tratta di un isomorfismo di spazi vettoriali.

La derivazione d/dt è un'applicazione lineare da S a $C^\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Più precisamente si tratta di un opertatore su S, ossia se $x(t) \in S$ allora $[dx/dt] := \dot{x}(t) \in S$. Infatti poiché $\dot{x}(t) = A\exp(At)x_0$ avremo che

$$\ddot{x} = A^2\exp(At)x_0 = A\dot{x}$$

e quindi $\dot{x} \in S$. Mostriamo quindi che, se $x(t) = \exp(At)x_0 \in S$ è autovettore di d/dt allora $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di A. Infatti x è autovettore di d/dt se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $[dx/dt] = \lambda x$. D'altra parte $[dx/dt] = Ax$ e quindi x è autovettore se e solo se $\lambda x = Ax$, e ciò è possibile se e solo se $\lambda\exp(At)x_0 = A\exp(At)x_0$. Ora, se $[A, \exp(At)] = 0$, allora $\lambda\exp(At)x_0 = A\exp(At)x_0$ se e solo se $\exp(At)\lambda x_0 = \exp(At)Ax_0$, e questo è vero se e solo se $\lambda x_0 = Ax_0$, ovvero se e solo se x_0 è autovettore di A. Rimane dunque da mostrare che $[A, \exp(At)] = 0$. Dal calclolo esplicito troviamo

$$\begin{aligned} A\exp(At) &= A\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(At)^k}{k!} \\ &= A\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(At)^t}{k!} \\ &= \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(At)^t}{k!}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(At)^t}{k!}\right)A \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(At)^k}{k!}\right)A \\ &= \exp(At)A, \end{aligned} \tag{1.3}$$

e questo conclude la dimostrazione. ∎

Lemma 1.2. *Sia* $S_0 = S_0(a_0, \ldots, a_{n-1})$, *con* $a_i \in \mathbb{R}$ *per* $i = 0, \ldots, n-1$, *l'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0 \tag{1.4}$$

al variare dei dati iniziali $x(0), \dot{x}(0), \ldots, x^{(n-1)}(0) \in \mathbb{R}$. *Allora* S_0 *è uno spazio vettoriale isomorfo a* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sappiamo (cf. Proposizione 8.3 in [1], Cap. 2) che, ponendo

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = \dot{x}, \\ \ldots \\ x_n = x^{(n-1)}, \end{cases} \tag{1.5}$$

e $\xi = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la (1.4) è equivalente al sistema $\dot{\xi} = A\xi$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

ovvero S_0 è uno spazio vettoriale isomorfo a $S(A)$. Ma allora dal Lemma 1.1 segue la tesi. ∎

Lemma 1.3. *Considerata l'equazione differenziale*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = f(t), \tag{1.7}$$

sia

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0, \tag{1.8}$$

l'equazione omogenea associata e siano $\overline{x}$ soluzione di (1.7) e x_0 soluzione di (1.8). Allora $x := \overline{x} + x_0$ è ancora soluzione di (1.7). In particolare, se denotiamo con $S_f(a_0, \ldots, a_{n-1})$ l'insieme delle soluzioni di (1.7), allora S_f è uno spazio affine su $S_0 = S_0(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Dimostrazione. Poiché $\overline{x}$ è soluzione di (1.7) allora

$$\overline{x}^{(n)} + a_{n-1}\overline{x}^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{\overline{x}} + a_1\dot{\overline{x}} + a_0\overline{x} = f(t),$$

mentre per x_0 dovrà valere

$$x_0^{(n)} + a_{n-1}x_0^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x}_0 + a_1\dot{x}_0 + a_0x_0 = 0.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} x^{(n)} &+ a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = \\ &= \overline{x}^{(n)} + x_0^{(n)} + a_{n-1}(\overline{x}^{(n-1)} + x_0^{(n-1)}) + \ldots + a_2(\ddot{\overline{x}} + \ddot{x}_0) + a_1(\dot{\overline{x}} + \dot{x}_0) + a_0(\overline{x} + x_0) \\ &= \overline{x}^{(n)} + a_{n-1}\overline{x}^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{\overline{x}} + a_1\dot{\overline{x}} + a_0\overline{x} + \\ &\qquad + x_0^{(n)} + a_{n-1}x_0^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{x}_0 + a_1\dot{x}_0 + a_0x_0 \\ &= f(t), \end{aligned} \tag{1.9}$$

ovvero anche x è soluzione di (1.7). Inoltre si vede che per ogni z soluzione di (1.7) esiste y soluzione di (1.8) tale che $z = \overline{x} + y$. Infatti poché

$$\begin{aligned} \overline{x}^{(n)} + a_{n-1}\overline{x}^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{\overline{x}} + a_1\dot{\overline{x}} + a_0\overline{x} = f(t) \\ z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + a_2\ddot{z} + a_1\dot{z} + a_0z = f(t), \end{aligned} \tag{1.10}$$

la differenza delle due equazioni in (1.10) sarà

$$z^{(n)} - \overline{x}^{(n)} + a_{n-1}(z^{(n-1)} - \overline{x}^{(n-1)}) + \ldots + a_2(\ddot{z} - \ddot{\overline{x}}) + a_1(\dot{z} - \dot{\overline{x}}) + a_0(z - \overline{x}) = 0,$$

quindi ponendo $y = z - \overline{x}$ avremo che y è soluzione di (1.8) e $z = y + \overline{x}$. Questo implica che S_f è uno spazio affine su S_0. ■

L'idea consiste quindi nello scrivere la soluzione generale di un'equazione non omogenea come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata (che sappiamo calcolare) e una soluzione particolore dell'equazione non omogenea.

2 Equazioni al second'ordine

Nel caso delle equazioni non omogenee al prim'ordine, i.e. equazioni della forma

$$\dot{x} + a_0x = f(t), \tag{2.1}$$

sappiamo (cf. Teorema 9.4 in [1], Cap. 2) che il metodo di variazione delle costanti ci da una formula esplicita per determinare la soluzione generale: più precisamente, sappiamo che è della forma

$$x(t) = e^{a_0t}\left(c + \int_0^t ds\, e^{-a_0s}f(s)\right). \tag{2.2}$$

Per quanto riguarda le equazioni al second'ordine, i.e. equazioni della forma

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = f(t), \tag{2.3}$$

il metodo di variazione delle costanti non ci permette di trovare una formula generale. Tuttavia vedremo che ci consente comunque di calcolare la soluzione generale della (2.3).

Intanto osserviamo che l'equazione omogenea associata alla (2.3) è

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = 0, \tag{2.4}$$

e le radici del polinomio caratteristico sono

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}. \tag{2.5}$$

Lemma 2.1. *Se $a_1^2 > 4a_0$ allora la soluzione generale di (2.4) è della forma*

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{2.6}$$

se $a_1^2 = 4a_0$ allora la soluzione generale di (2.4) è della forma

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-a_1 t/2}, \tag{2.7}$$

e infine se $a_1^2 < 4a_0$, scrivendo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, la soluzione generale di (2.4) è della forma

$$x(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t), \tag{2.8}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

Dimostrazione. Si veda [2]. ■

Alla luce del Lemma 1.3, per determinare la soluzione generale di (2.3) dobbiamo determinare una soluzione particolare $\overline{x}$ e scrivere $x = \overline{x} + x_0$, dove x_0 è soluzione generale di (2.4) e quindi assume una delle forme descritte nel Lemma 2.1. Il metodo della variazione delle costanti consiste nel porre $c_1 = c_1(t)$ e $c_2 = c_2(t)$ in (2.6), (2.7) o (2.8), a seconda del caso in cui ci troviamo, e imporre che $\overline{x}(t)$ sia soluzione, ovvero che verifichi (2.3), esattamente come nel caso al prim'ordine. Scriviamo quindi, in generale

$$\overline{x}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t), \tag{2.9}$$

dove $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono le soluzioni fondamentali nei tre casi del Lemma 2.1, ovvero se $a_1^2 > 4a_0$ avremo

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \\ y_2(t) = e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Se $a_1^2 = 4a_0$ allora

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{-a_1 t/2}, \\ y_2(t) = te^{-a_1 t/2}, \end{cases} \tag{2.11}$$

e infine se $a_1^2 < 4a_0$, avremo

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), \\ y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t). \end{cases} \tag{2.12}$$

Se imponiamo la condizione

$$\dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 = 0 \tag{2.13}$$

allora avremo

$$\ddot{\overline{x}} = \dot{c}_1\dot{y}_1 + \dot{c}_2\dot{y}_2 + c_1\ddot{y}_1 + c_2\ddot{y}_2$$

e quindi

$$\begin{aligned}
&\ddot{\overline{x}} + a_1\dot{\overline{x}} + a_0\overline{x} = \\
&= \dot{c}_1\dot{y}_1 + \dot{c}_2\dot{y}_2 + (c_1\ddot{y}_1 + c_2\ddot{y}_2) + a_1(c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2) + a_0(c_1y_1 + c_2y_2) \\
&= \dot{c}_1\dot{y}_1 + \dot{c}_2\dot{y}_2,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

dove l'ultima uguaglianza è vera perché $c_1y_1 + c_2y_2$ è soluzione del sistema omogeneo associato. Ma allora affinché $\overline{x}$ sia soluzione, le "costatnti" $c_1(t), c_2(t)$, devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dot{c}_1y_1 + \dot{c}_2y_2 = 0, \\ \dot{c}_1\dot{y}_1 + \dot{c}_2\dot{y}_2 = f(t). \end{cases} \tag{2.15}$$

Dalla prima, ad esempio, troviamo $\dot{c}_2 = -\dot{c}_1y_1/y_2$, che sostituita nella seconda da

$$\dot{c}_1\dot{y}_1 - \dot{c}_1y_1\dot{y}_2/y_2 = f(t)$$

e quindi possiamo scrivere formalmente

$$c_1(t) = \int dt \frac{f(t)y_2(t)}{\dot{y}_1(t)y_2(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t)} \tag{2.16}$$

Utiliziamo tale scrittura formale dell'integrale perché, dato che cerchiamo una soluzione particolare, possiamo scegliere arbitrariamente la costante d'integrazione, ad esempio in modo tale che sia nulla. Sostituendo la (2.16) in (2.13) riusciamo a calcolare anche $c_2(t)$. Si osservi che $\dot{y}_1(t)y_2(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t) \neq 0$, cf. [2].

3 Un esempio

Consideriamo l'equazione differenziale odinaria

$$\ddot{x} + x = t$$

L'equazione omogenea associata è

$$\ddot{x} + x = 0$$

e questa ha autovalori $\lambda_\pm = \pm i$ quindi la soluzione generale dell'omogenea è

$$x_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Cerchiamo quindi una soluzione particolare della forma

$$\overline{x} = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t$$

Avremo quindi

$$\dot{\overline{x}} = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

dopo aver imposto la condizione (2.13). Derivando una seconda volta otteniamo

$$\ddot{\overline{x}} + \overline{x} = -\dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t$$

e affinché sia una soluzione dovrà essere

$$-\dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t = t$$

dalla (2.13) troviamo

$$\dot{c}_2 = -\dot{c}_1 \frac{\cos t}{\sin t}$$

e quindi

$$-\dot{c}_1 \sin t + \dot{c}_2 \cos t = \frac{-\dot{c}_1 \sin^2 t - \dot{c}_1 \cos^2 t}{\sin t} = -\frac{\dot{c}_1}{\sin t}$$

deve quindi valere

$$\dot{c}_1 = -t \sin t$$

e integrando troviamo

$$c_1(t) = -\int dt\, t \sin t = t \cos t - \sin t$$

Per quanto riguarda c_2 deve valere

$$\dot{c}_2 = t \cos t$$

e quindi

$$c_2(t) = \int dt\, t \cos t = t \sin t + \cos t$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea è quindi data da

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + (t \cos t - \sin t) \cos t + (t \sin t + \cos t) \sin t$$

Osserviamo ininfine che se si ha a che fare con un problema di Cauchy, basta determinare la soluzione generale del problema differenziale e poi imporre il dato iniziale per calcolare il valore delle costanti che danno l'unica soluzione.

Riferimenti bibliografici

[1] G. Gentile, *Introduzione ai sistemi dinamici. 1. Equazioni differenziali lineari, analisi qualitativa e alcune applicazioni*, disponibile in rete (http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2010/testo/testo.html)

[2] R. Feola, L. Schaffler *Terzo tutorato di FM1 e soluzioni, A.A. 2009/2010*, disponibili entrambi in rete (http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2010/FM1/FM1tutorato.html)