

## Capitolo 7. Moto in un campo centrale

### 30. Moti centrali e problema dei due corpi

**30.1. Introduzione.** Nel capitolo precedente abbiamo discusso a fondo l'analisi qualitativa di sistemi meccanici conservativi unidimensionali. Ci si può chiedere se tale analisi non sia solo un utile esercizio matematico e possa, al contrario, avere rilevanza anche per problemi fisicamente più realistici.

Il problema dei due corpi costituisce appunto un problema fisico fisicamente interessante al quale possiamo applicare i risultati validi per sistemi unidimensionali. Questo non è assolutamente ovvio: in linea di principio abbiamo un sistema a 6 gradi di libertà (due punti materiali in uno spazio euclideo tridimensionale). Vedremo tuttavia che, facendo ipotesi opportune sull'interazione tra i due punti materiali, il problema si riduce a due problemi a 3 gradi di libertà disaccoppiati, di cui uno è banale e l'altro, a sua volta, porta a un problema a 2 gradi di libertà, cioè, matematicamente, a un sistema di due equazioni differenziali ordinarie in due incognite: una delle due equazioni dipende da una sola variabile e se ne può quindi trovare la soluzione utilizzando i risultati trovati per i sistemi unidimensionali; tale soluzione può poi essere utilizzata per risolvere la seconda equazione.

Ogni riduzione dei gradi di libertà del sistema è legato a una legge di conservazione (conservazione della quantità di moto e conservazione del momento della quantità di moto o momento angolare): questo è in realtà un fatto generale (cfr. l'osservazione 30.14 più avanti).

**30.2. Notazioni.** Nel presente capitolo (e nei successivi) indicheremo in neretto i vettori nello spazio tridimensionale, e, introdotta in  $\mathbb{R}^3$  una base ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , scriveremo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  se  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ . Indicheremo con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  il prodotto scalare e con  $[\cdot, \cdot]$  il prodotto vettoriale: dati due vettori  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  si avrà

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \quad (30.1)$$

e

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \quad (30.2)$$

dove l'ultima notazione è solo formale e può essere considerata un'utile regola mnemonica per calcolare il prodotto vettoriale di due vettori.

Il prodotto scalare (30.1) induce una norma in  $\mathbb{R}^3$ , che indicheremo con  $|\cdot|$ : ricordiamo che lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  munito di un prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  prende il nome di spazio euclideo. Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  si avrà quindi

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (30.3)$$

**30.3. Impostazione del problema.** Studieremo ora il sistema costituito da due punti materiali che interagiscono attraverso una *forza centrale*, *i.e.* una forza che (1) soddisfi il terzo principio della dinamica, (2) dipenda solo dal modulo della differenza dei vettori posizione dei due punti e (3) sia diretta lungo la retta congiungente i due punti (cfr. anche la nota bibliografica). Se i punti hanno, rispettivamente, massa  $m_1$  e  $m_2$  e sono individuati da due vettori  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  in  $\mathbb{R}^3$ , allora la forza dipenderà dalla variabile  $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ . Fisicamente si tratta di un sistema isolato costituito da due punti materiali interagenti: tale problema è noto come “problema dei due corpi”. Diremo che il moto dei due punti materiali avviene in un *campo centrale*. Cfr. la figura 30.1.

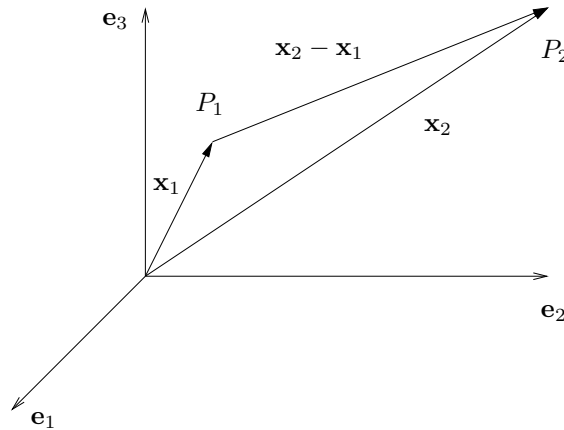


FIGURA 30.1. Due punti  $P_1$  e  $P_2$  in  $\mathbb{R}^3$ .

Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_2(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \end{cases} \quad (30.4)$$

e, per il terzo principio della dinamica, abbiamo che  $\mathbf{F}_1(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = -\mathbf{F}_2(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ , mentre, poiché la forza è diretta lungo la congiungente i due punti, deve risultare anche

$$\mathbf{F}_1(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad (30.5)$$

per qualche funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; la quantità  $F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$  prende il nome di *intensità* della forza  $\mathbf{F}_1(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ . Possiamo quindi riscrivere le equazioni (30.4) come

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \end{cases} \quad (30.6)$$

che dunque vale nel caso di forze centrali.

Nel seguito supporremo sempre che sia  $F$  di classe  $C^1$ , tranne eventualmente per  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ .

Vedremo che il moto di un sistema del tipo di (30.6) può essere ricondotto allo studio di un sistema a un grado di libertà (sistema unidimensionale).

**30.4. LEMMA.** *Il sistema a 6 gradi di libertà (30.6) si disaccoppia in due problemi a 3 gradi di libertà, che rappresentano uno un moto rettilineo uniforme e l'altro un sistema tridimensionale interagente con un punto fisso attraverso una forza centrale.*

**30.5. Dimostrazione del lemma 30.4.** Dividendo le due equazioni in (30.6) rispettivamente per  $m_1$  e  $m_2$ , quindi sottraendole l'una dall'altra, otteniamo

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 - \ddot{\mathbf{x}}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad (30.7)$$

che è un'equazione chiusa nella variabile  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  (i.e. dipende da  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  solo attraverso la combinazione  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ).

Sommando invece le due equazioni in (30.6) otteniamo

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}. \quad (30.8)$$

Quindi, se definiamo il cambio di variabili

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \end{cases} \quad (30.9)$$

dove  $\mathbf{R}$  prende il nome di *coordinata del centro di massa* e  $\mathbf{r}$  di *coordinata relativa*, abbiamo che, nelle nuove variabili, le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}, \\ \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} F(|\mathbf{r}|), \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \end{cases} \quad (30.10)$$

così che la prima descrive un punto materiale di massa  $M \equiv m_1 + m_2$  che si muove di moto rettilineo uniforme (non essendo soggetto a forze), mentre la seconda si può interpretare come equazione del moto di un punto materiale di massa  $\mu \equiv m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$  (che prende il nome di *massa ridotta*) interagente con un punto fisso attraverso una forza centrale. ■

**30.6. LEMMA.** *Una forza centrale è sempre conservativa. Se  $F(|\mathbf{r}|)$  è la sua intensità esiste dunque una funzione  $V: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F(r) = -[dV/dr](r)$ .*

**30.7. Dimostrazione del lemma 30.6.** Dobbiamo dimostrare che esiste una funzione  $U(\mathbf{r})$  tale che

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} F(|\mathbf{r}|) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(\mathbf{r}). \quad (30.11)$$

In coordinate sferiche  $(\rho, \theta, \varphi)$  l'operatore gradiente  $\partial/\partial \mathbf{r}$  è rappresentato (cfr. l'esercizio 3) da

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left( \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (30.12)$$

Poiché  $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  è diretto lungo la direzione radiale si ha

$$F(|\mathbf{r}|) = F(\rho) = -\frac{\partial}{\partial \rho} U(\mathbf{r}); \quad (30.13)$$

quindi la funzione  $U(\mathbf{r})$  dipende solo dal modulo  $|\mathbf{r}|$  e, se poniamo  $V(|\mathbf{r}|) = U(\mathbf{r})$ , segue l'asserto. ■

**30.8. DEFINIZIONE (ENERGIA POTENZIALE CENTRALE).** *Data la forza centrale  $F(|\mathbf{r}|) \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ , chiameremo energia potenziale centrale la funzione  $V(|\mathbf{r}|)$  tale che  $F(r) = -[dV/dr](r)$ .*

**30.9. LEMMA.** *Il momento angolare  $\mathbf{L}$  del sistema descritto dalla seconda delle equazioni (30.10) è una costante del moto. Se  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$  il moto ha luogo nel piano ortogonale al vettore  $\mathbf{L}$ , se  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$  il moto avviene lungo una retta.*

**30.10. Dimostrazione del lemma 30.9.** Consideriamo il sistema descritto dalla seconda equazione in (30.10), che possiamo riscrivere

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r F(|\mathbf{r}|), \quad (30.14)$$

dove  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  e  $\mu$  è la massa ridotta definita in §30.5. È immediato allora verificare che il momento angolare  $\mathbf{L} = \mu[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$  si conserva. Infatti

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{L}} = \mu[\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r}, \mathbf{e}_r] F(|\mathbf{r}|) = \mathbf{0}, \quad (30.15)$$

per le proprietà del prodotto vettoriale.

Sono allora possibili due casi. Siano  $\mathbf{r}(t_0)$  e  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  i valori delle variabili  $\mathbf{r}(t)$  e  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  all'istante iniziale  $t = t_0$ . Se

$$[\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0)] = \mathbf{0}, \quad (30.16)$$

allora o i due vettori  $\mathbf{r}(t_0)$  e  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  sono paralleli o almeno uno dei due è nullo.

Se la (30.16) è soddisfatta, allora esistono due numeri reali  $a, b$  e un versore  $\mathbf{k}$  tali che

$$\mathbf{r}(t_0) = a\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = b\mathbf{k}. \quad (30.17)$$

Esisterà allora una soluzione della (30.14) della forma  $\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{k}$ , con  $a(t_0) = a$  e  $\dot{a}(t_0) = b$ : per verificarlo, semplicemente si può inserire la (30.17) nella (30.14), tenendo conto che  $\mathbf{e}_r = \mathbf{k}$  e  $|\mathbf{r}(t)| = |a(t)|$ , e vedere che si ottiene

$$\mu\ddot{a}(t) = F(|a(t)|), \quad a(t_0) = a, \dot{a}(t_0) = b, \quad (30.18)$$

che ammette soluzione unica sotto le ipotesi di regolarità fatte per  $F$ ; inoltre, per lo stesso motivo, la soluzione dell'equazione (30.14) è unica e quindi è data da  $a(t)\mathbf{k}$ . In conclusione, in corrispondenza di dati iniziali che verificano la (30.16), il moto avviene lungo una retta (il caso del punto d'equilibrio si può considerare un caso particolare).

Se al contrario si ha

$$\mathbf{L} \equiv \mu[\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0)] \neq \mathbf{0}, \quad (30.19)$$

i due vettori  $\mathbf{r}(t)$  e  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  sono allora in ogni istante  $t$  perpendicolari al vettore  $\mathbf{L}$  (poiché, se la (30.19) vale a  $t = t_0$ , deve allora valere a ogni istante  $t \in \mathbb{R}$ , essendo  $\mathbf{L}$  una costante del moto). Il moto quindi avviene nel piano perpendicolare al momento angolare  $\mathbf{L}$ . ■

**30.11. LEMMA.** *Il sistema descritto dall'equazione (30.14) si disaccoppia in due sistemi unidimensionali, che descrivono uno il moto radiale e l'altro il moto angolare nel piano in cui ha luogo il moto. L'equazione del moto radiale è chiusa (i.e. dipende solo dalla variabile che descrive il moto radiale) e l'equazione del moto angolare può essere risolta per quadratura una volta che sia stata risolta la prima.*

**30.12. Dimostrazione del lemma 30.11.** Per il lemma 30.9 il sistema *a priori* tridimensionale (30.14) è un sistema a due gradi di libertà: infatti il moto si svolge in un piano, quindi, scegliendo un sistema di coordinate in cui l'asse  $z$  è diretto lungo la direzione del vettore momento angolare, si ha  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$ . Possiamo allora introdurre coordinate polari  $\rho \geq 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ , ponendo

$$\begin{cases} r_1 = \rho \cos \theta, \\ r_2 = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad (30.20)$$

ed esprimere il modulo del momento angolare in tali coordinate. Un semplice calcolo mostra che  $|\mathbf{L}| = |L|$ , se

$$\begin{aligned} L &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ r_1 & r_2 & 0 \\ \mu \dot{r}_1 & \mu \dot{r}_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} & \mathbf{e}_x & & & \mathbf{e}_y & & & \mathbf{e}_z \\ & \rho \cos \theta & & & \rho \sin \theta & & & 0 \\ \mu (\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta) & & & & \mu (\dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta) & & & 0 \end{pmatrix} = \mu \rho^2 \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (30.21)$$

e quindi la conservazione di  $L$  dà

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu \rho^2}, \quad (30.22)$$

Se quindi la dipendenza di  $\rho(t)$  da  $t$  è nota, allora la funzione  $\theta(t)$  si ottiene per quadratura, *i.e.* come integrale di una funzione nota:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t ds \frac{L}{\mu \rho^2(s)}. \quad (30.23)$$

Il problema si è quindi ridotto allo studio dell'evoluzione della coordinata radiale  $\rho(t)$  e, se dimostriamo che l'equazione che ne regola il moto non dipende da  $\theta$ , si ottiene l'asserto del lemma.

Utilizziamo dunque il fatto che l'energia è anch'essa una quantità conservata per il sistema (30.6). Quindi possiamo scrivere, nelle variabili  $\mathbf{r}, \mathbf{R}$ ,

$$E_{\text{TOT}} = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + V(|\mathbf{r}|) = \text{costante} \quad (30.24)$$

e poiché  $\dot{\mathbf{R}}$  è costante (cfr. la prima equazione in (30.10)) e

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta, \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta, 0), \quad (30.25)$$

abbiamo che

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + V(\rho) = \text{costante}, \quad (30.26)$$

dove  $E = E_{\text{TOT}} - M \dot{\mathbf{R}}^2/2$ . Introducendo la (30.22) nella (30.26) otteniamo

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho), \quad (30.27)$$

dove

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad (30.28)$$

prende il nome di *energia potenziale efficace*.

Derivando rispetto al tempo la (30.27) otteniamo l'equazione radiale

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}(\rho)}{d\rho}, \quad (30.29)$$

che si può interpretare come l'equazione di un punto materiale di massa  $\mu$  che si muove sulla semiretta  $\mathbb{R}_+$  con energia potenziale  $V_{\text{eff}}(\rho)$ , data dalla somma dell'energia potenziale originaria  $V(\rho)$  più l'energia potenziale  $L^2(2\mu\rho^2)^{-1}$ : la forza corrispondente a quest'ultima prende il nome di *forza centrifuga*. ■

**30.13. Osservazione.** In coordinate polari una base (ortonormale) nel piano è costituita dal versore radiale e dal versore tangenziale, definiti, rispettivamente, come

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta), \\ \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta). \end{cases} \quad (30.30)$$

Poiché la velocità  $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$  è data da

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta, \end{cases} \quad (30.31)$$

e l'accelerazione  $\mathbf{a} \equiv \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y})$  è data da

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{\rho} \cos \theta - 2\dot{\rho}\dot{\theta} \sin \theta - \rho\ddot{\theta} \cos \theta - \rho\dot{\theta}^2 \sin \theta, \\ \ddot{y} = \ddot{\rho} \sin \theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \cos \theta - \rho\ddot{\theta} \sin \theta + \rho\dot{\theta}^2 \cos \theta, \end{cases} \quad (30.32)$$

nella base (30.30) possiamo esprimere i due vettori come

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (30.33)$$

Notiamo anche che si ha

$$\mathbf{L} = \mu [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}] = \mu [\rho \mathbf{e}_\rho, \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta] = \mu [\rho \mathbf{e}_\rho, \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta] = \mu \rho^2 \dot{\theta} [\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta] = \mu \rho^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z, \quad (30.34)$$

dove  $\mathbf{e}_z$  è un versore (ortogonale al piano in cui si svolge il moto) tale che  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  forma una base ortonormale in  $\mathbb{R}^3$ .

Se indichiamo con  $a_\rho$  e  $a_\theta$  le componenti radiale e tangenziale, rispettivamente, del vettore accelerazione e con  $F_\rho$  e  $F_\theta$  le componenti radiale e tangenziale, rispettivamente, della forza, l'equazione del moto (30.14) diventa

$$\begin{cases} \mu a_\rho = \mu(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = F_\rho = -[dV/d\rho](\rho), \\ \mu a_\theta = \mu(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) = F_\theta = 0, \end{cases} \quad (30.35)$$

poiché la forza è diretta lungo la direzione radiale.

In particolare la seconda equazione in (30.35), moltiplicata per  $\rho$ , diventa

$$0 = 2\mu\rho\dot{\theta} + \mu\rho^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(\mu\rho^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt}, \quad (30.36)$$

così che ritroviamo la conservazione del momento angolare (cfr. le (30.15) e (30.21)).

**30.14. Osservazione.** Si noti che, a partire dal sistema (30.6), il fatto che la forza d'interazione dei due punti materiali sia centrale implica che da un sistema a 6 gradi di libertà si possa passare a due sistemi disaccoppiati (*i.e.* indipendenti) a 3 gradi di libertà ciascuno, uno dei quali è caratterizzato da un moto banale, mentre l'altro richiede ancora della discussione: questo è il contenuto del Lemma 30.2. Si noti che questo è legato alla conservazione della quantità di moto totale del sistema,  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2$ , espressa dalla prima equazione di (30.10).

La conservazione della direzione del momento angolare implica che il moto si svolge su un piano (Lemma 30.9) e la conservazione del modulo del momento angolare permette di studiare separatamente il moto radiale e il moto angolare: il primo si risolve utilizzando la conservazione dell'energia, mentre il secondo si ottiene successivamente per quadratura (Lemma 30.11). Si vede quindi che la riduzione dei gradi di libertà (da 3 a 2, da 2 a 1) è legata all'esistenza di quantità conservate: questo è in realtà un risultato generale (teorema di Noether); cfr. la nota bibliografica.

**30.15. Osservazione.** La forza centrifuga

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = F_{\text{cf}}\mathbf{e}_{\mathbf{r}}, \quad F_{\text{cf}} = -\frac{d}{d\rho}\left(\frac{L^2}{2\mu\rho^2}\right) = \frac{L^2}{\mu\rho^3}, \quad (30.37)$$

dovuta al termine aggiuntivo  $L^2(2\mu\rho^2)^{-1}$  che appare nella definizione (30.28) di energia potenziale efficace, è di fatto una forza apparente. Infatti il vettore  $\mathbf{r}(t)$  rappresenta la posizione del punto di posizione  $\mathbf{x}_1(t)$  nel sistema di riferimento in cui il punto di posizione  $\mathbf{x}_2(t)$  è fermo: tale sistema di riferimento non è inerziale, con conseguente comparsa di forze apparenti.

**30.16. LEMMA.** *Sia dato il sistema descritto dall'equazione (30.14): se l'equazione radiale (30.29) ha soluzione  $\rho(t) = \rho_0$ , con  $\rho_0$  punto stazionario di  $V_{\text{eff}}$ , allora il moto del sistema è periodico, con periodo*

$$T_0 = 2\pi\frac{\mu\rho_0^2}{L}, \quad (30.38)$$

e corrisponde a un moto circolare uniforme.

**30.17. Dimostrazione del lemma (30.16).** Se  $\rho_0$  è un punto stazionario per  $V_{\text{eff}}(\rho)$  allora  $(\rho_0, 0)$  è un punto d'equilibrio per il sistema (30.29) e quindi  $\rho(t) = \rho_0$  per ogni  $t$ . Ne segue che l'equazione (30.22) può essere immediatamente integrata e dà

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega_0 t, \quad \omega_0 = L(\mu\rho_0^2)^{-1}, \quad (30.39)$$



da cui segue l'asserto. ■

**30.18.** LEMMA. *Se*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 V(\rho) = 0, \quad (30.40)$$

*allora esiste un valore  $\rho_{\min}$  tale che  $\rho(t) \geq \rho_{\min} \forall t$ .*

**30.19.** *Dimostrazione del lemma 30.18.* Poiché  $V_{\text{eff}}(\rho)$  è data dalla (30.28), se vale la (30.40), risulta

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(\rho) = \infty, \quad (30.41)$$

e quindi, fissato  $E_0 > \inf_{\rho \in \mathbb{R}_+} V_{\text{eff}}(\rho)$ , se  $\rho_{\min}$  indica la più piccola radice dell'equazione  $E_0 - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ , si deve avere  $\rho \geq \rho_{\min}$ . ■

**30.20.** *Osservazione.* La condizione (30.40) è soddisfatta per ogni funzione  $V(\rho)$  che sia regolare in  $\rho = 0$ . Un altro caso importante in cui tale condizione è soddisfatta è il caso dell'energia potenziale coulombiana che sarà studiato in dettaglio nel paragrafo §5.2.

**30.21.** LEMMA. *Condizione necessaria e sufficiente perché l'orbita di un moto centrale sia chiusa è che*

- (1) *la variabile radiale sia costante o abbia moto periodico, e*
- (2) *se  $T_0$  è il periodo di tale moto, l'incremento  $\Delta\theta$  della variabile angolare nell'intervallo di tempo  $[0, T_0]$  sia razionale rispetto a  $2\pi$ .*

*Se tali condizioni sono soddisfatte, la variabile  $\theta$  varia di una quantità  $\Delta\theta$  in ogni intervallo di tempo di ampiezza  $T_0$  e il periodo del moto complessivo (i.e. della variabile relativa  $\mathbf{r}$ ) è dato da  $NT_0$ , dove  $N$  è l'intero minimo tale che  $N\Delta\theta = 2\pi M$ , con  $M$  intero. In caso contrario si dice che il moto è quasiperiodico.*

**30.22.** *Dimostrazione del lemma 30.21.* Il caso in cui  $\rho(t)$  sia costante è stato discusso nel Lemma §16. Se il moto della variabile radiale  $\rho(t)$  è periodico, allora essa varia tra un valore minimo  $\rho_1$  e un valore massimo  $\rho_2$ . Se  $\rho(t_0) = \rho_1$  allora si ha  $\rho(t_0 + T_0) = \rho_1$ , dove  $T_0$  indica il periodo della funzione  $t \rightarrow \rho(t)$ . Durante il tempo  $T_0$  la variabile angolare  $\theta(t)$  subisce un incremento

$$\theta(t_0 + T_0) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + T_0} ds \dot{\theta}(s) = \int_{t_0}^{t_0 + T_0} ds \frac{L}{\mu \rho^2(s)}; \quad (30.42)$$

tale incremento sarà positivo se  $L > 0$  e negativo se  $L < 0$  (il caso  $L = 0$  va escluso perché corrisponde a un moto rettilineo uniforme, come visto in §30.10). Cfr. la figura 30.2.

Poiché  $\rho(t)$  è periodica di periodo  $T_0$  la quantità  $\theta(t_0 + T_0) - \theta(t_0)$  è indipendente

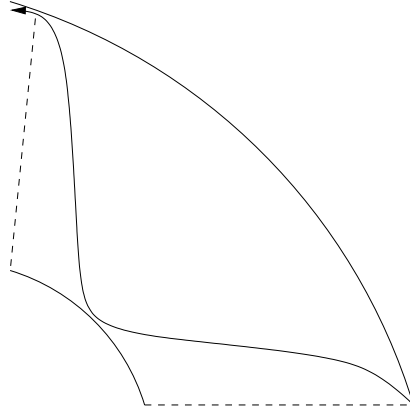


FIGURA 30.2. Incremento della variabile angolare in corrispondenza di un periodo del moto radiale. Il moto avviene all'interno di una corona circolare di raggi  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , se  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sono i due valori tra i quali oscilla la variabile radiale.

da  $t_0$ ; infatti, se  $g(t) = L(\mu\rho^2(t))^{-1}$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} ds g(s) &= \int_0^{T_0} ds g(s) + \int_{T_0}^{t_0+T_0} ds g(s) - \int_0^{t_0} ds g(s) \\ &= \int_0^{T_0} ds g(s) + \int_{T_0}^{t_0+T_0} ds g(s - T_0) - \int_0^{t_0} ds g(s) \\ &= \int_0^{T_0} ds g(s) + \int_0^{t_0} ds g(s) - \int_0^{t_0} ds g(s) = \int_0^{T_0} ds g(s), \end{aligned} \quad (30.43)$$

così che possiamo scrivere

$$\Delta\theta = \theta(t_0 + T_0) - \theta(t_0) = \int_0^{T_0} ds \frac{L}{\mu\rho^2(s)}, \quad (30.44)$$

indipendentemente da  $t_0$ . Quindi, nel tempo  $NT_0$ , con  $N \in \mathbb{N}$ , la variazione di  $\theta(t)$  è data da

$$\theta(NT_0) - \theta(0) = N\Delta\theta. \quad (30.45)$$

Se  $\Delta\theta = 2\pi M/N$  con  $M, N \in \mathbb{N}$ , risulta allora

$$\theta(NT_0) = \theta(0) + N\Delta\theta = \theta(0) + 2\pi M \quad (30.46)$$

e quindi  $\theta(NT_0) = \theta(0)$  se si tiene conto che  $\theta(t)$  è definita mod  $2\pi$ ; inoltre  $\dot{\theta}(NT_0) = \dot{\theta}(0)$ , che segue sempre dalla (30.23).

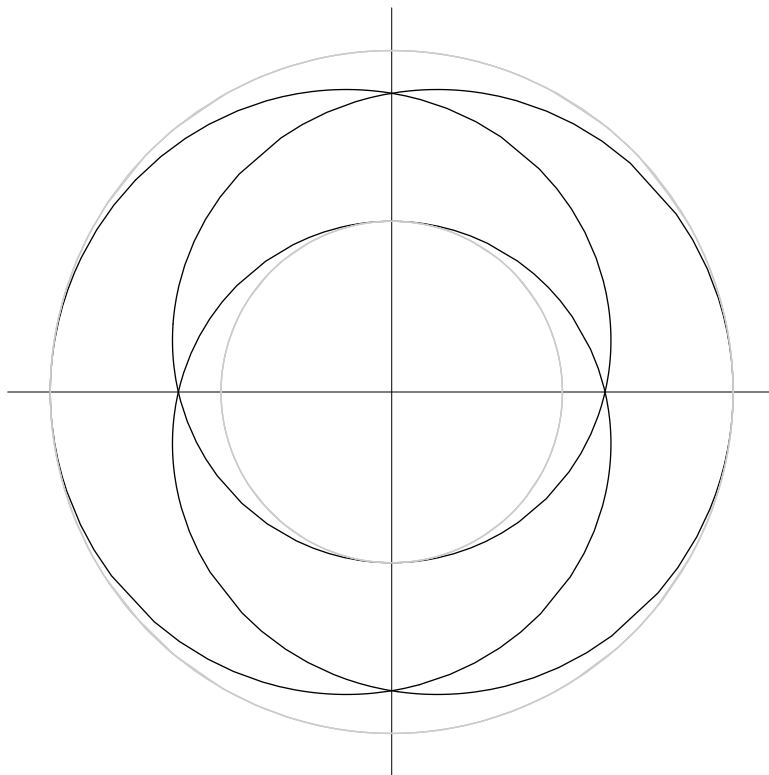


FIGURA 30.3. Discussione del lemma 30.21: caso in cui il rapporto  $\Delta\Theta/2\pi$  è razionale. Nel caso rappresentato si ha  $M = 3$  e  $N = 2$ .

Ne segue che il moto di  $\mathbf{r}(t)$  è periodico, di periodo  $NT_0$ . Cfr. la figura 30.3.

Se al contrario risulta  $\Delta\theta = 2\pi\alpha$ , con  $\alpha$  irrazionale, allora non esiste nessun intero  $N$  tale che  $\theta(NT_0) - \theta(0)$  sia un multiplo di  $2\pi$ : dunque il moto di  $\theta(t)$  non può essere periodico con periodo multiplo di  $T_0$  e il moto complessivo di  $\mathbf{r}(t)$  non è periodico. Cfr. la figura 30.4. ■

**30.23.** LEMMA. *A eccezione dei casi del campo centrale armonico e del campo centrale coulombiano, per un sistema del tipo di (30.6), i.e. descritto da forze centrali, i dati iniziali che danno luogo a orbite chiuse hanno misura di Lebesgue nulla nel sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  dei dati iniziali.*

**30.24.** *Dimostrazione del lemma 30.23.* Sia  $\Sigma$  l'insieme dei dati iniziali che danno origine a moti periodici della variabile radiale; indichiamo con  $z = (\rho_0, \dot{\rho}_0)$  gli elementi di  $\Sigma$ . Per ogni  $z \in \Sigma$  sia  $T_0(z)$  il corrispondente periodo: quindi  $\rho(t + T_0(z)) = \rho(t)$ . Nell'intervallo  $[0, T_0(z)]$  la variabile angolare avrà subito un incremento  $\Delta\theta(z)$  (commensurabile con  $2\pi$  se e solo se il moto complessivo è periodico). La quantità

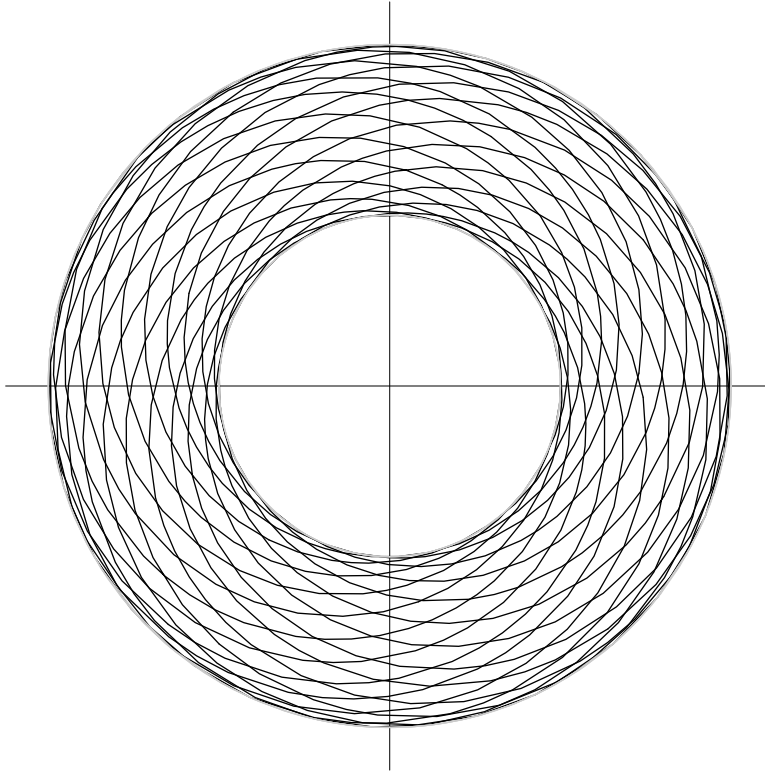


FIGURA 30.4. Discussione del lemma 30.21: caso in cui il rapporto  $\Delta\Theta/2\pi$  è irrazionale. La traiettoria riempie densamente la corona circolare  $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ : in figura solo un tratto limitato della traiettoria è graficato.

$\Delta\theta(z)$  è una funzione continua di  $z$  (per il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali).

Se la funzione  $\Delta\theta(z)$  non assume valore identicamente costante in alcun insieme aperto limitato  $A \subset \Sigma$ , (*i.e.* se la derivata di  $\Delta\theta(z)$  rispetto a  $z$  non è identicamente nulla in alcun aperto limitato  $A \subset \Sigma$ ) il rapporto  $\Delta\theta(z)/2\pi$  assumerà allora valori irrazionali in un sottoinsieme di  $A$  che ha misura di Lebesgue piena (*i.e.* in un sottoinsieme il cui complementare in  $A$  ha misura di Lebesgue nulla).

Il valore della funzione  $\Delta\theta(z)$  dipende dall'energia potenziale  $V$ : per completare la dimostrazione del lemma occorre ancora verificare che (1) per il campo centrale armonico e per il campo centrale coulombiano la quantità  $\Delta\theta(z)$  non varia al variare dei dati iniziali  $z$  a cui corrispondono orbite limitate e, inoltre, il rapporto  $\Delta\theta(z)/2\pi$  è razionale, e (2) non esistono altri campi centrali che verificano tali proprietà. Il punto (1) sarà oggetto del paragrafo §31 e sarà verificato con conti espliciti; il punto (2), *i.e.* il fatto che non esistano altri campi centrali per i quali tutte le orbite limitate siano

chiuse, è invece concettualmente più profondo e costituisce il teorema di Bertrand che sarà studiato in dettaglio nel paragrafo §32. Quindi i risultati dei due prossimi paragrafi permettono di concludere la dimostrazione del lemma. ■

**30.25. Osservazione.** In vista della proprietà richiesta sulla quantità  $\Delta\theta(z)$  nel paragrafo §30.24, appare del tutto eccezionale che possano esistere energie potenziali centrali per i quali tutte le orbite limitate siano chiuse (e quindi tutte le traiettorie che si svolgono in una regione limitata del piano siano periodiche). Come detto sopra, dimostreremo nel paragrafo §31 che energie potenziali di questo tipo esistono: sono quella coulombiana (attrattiva) e quella armonica. Esse sono anche le uniche a soddisfare tale proprietà (cfr. il teorema 32.21 più avanti).

**30.26. Osservazione.** Invece di caratterizzare i dati iniziali che danno luogo a orbite chiuse dicendo che essi hanno misura (di Lebesgue) nulla nell'insieme dei dati iniziali, possiamo anche dire che essi sono non generici. Ricordiamo che, dato un sistema dinamico, una proprietà si dice *generica* se vale su un *insieme di seconda categoria*, i.e. su un insieme che sia intersezione numerabile di insiemi aperti densi (cfr. la nota bibliografica).

Secondo tale definizione, nell'insieme dei valori  $I$  assunti dal rapporto  $\Delta\theta(z)/2\pi$  i valori irrazionali sono generici. Infatti sia  $J$  un intervallo qualsiasi contenuto in  $I$ : Possiamo scrivere i numeri razionali in  $J$  come  $p/q$ , con  $p \in P(q) \equiv \{p : p_1(q) \leq p \leq p_2(q)\}$ , dove  $p_1(q)$  e  $p_2(q)$  sono tali che  $p/q \in J$ . Sia  $B_q = \{p/q : p \in P(q)\}$ . Definiamo  $A_q = J \setminus B_q$ : ovviamente  $A_q$  è aperto e denso. D'altra parte l'insieme dei numeri irrazionali in  $J$  si può scrivere come  $\bigcap_{q=1}^{\infty} A_q$ , ed è quindi intersezione numerabile di insiemi aperti densi.

In conclusione la proprietà che al variare di  $z \in \Sigma$  il rapporto  $\Delta\theta(z)/2\pi$  sia razionale (purché  $\Delta\theta(z)$  non sia costante in  $z$ ) è non generica: quindi i dati iniziali che danno luogo a orbite chiuse sono non generici.

Intuitivamente una proprietà generica è una proprietà che “tipicamente” è soddisfatta: prendendo un numero a caso in un qualsiasi intervallo  $J$  “ci si aspetta” che tale numero sia irrazionale. La genericità si può considerare un equivalente topologico della proprietà di avere misura piena, che è invece una nozione metrica.

**30.27. LEMMA.** *Se  $L \neq 0$  l'orbita su cui si svolge il moto è data dall'equazione*

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{\text{eff}}(\rho))}, \quad (30.47)$$

*che prende il nome di prima forma dell'equazione delle orbite.*

**30.28. Dimostrazione del lemma 30.27.** Se  $L \neq 0$ , per la (30.22) il segno di  $|\dot{\theta}(t)|$  è strettamente positivo, quindi  $\theta$  è monotono in  $t$  (crescente se  $L > 0$  e decrescente se  $L < 0$ ). La funzione  $\theta = \theta(t)$  è allora invertibile in  $t = t(\theta)$ . Possiamo quindi parametrizzare la traiettoria in funzione dell'angolo  $\theta$  anziché del tempo  $t$ , scrivendo,

con abuso di notazione,  $\rho(t) = \rho(t(\theta)) = \rho(\theta)$ . Poiché dalle (30.22) e (30.27) risulta

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{\text{eff}}(\rho))}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu\rho^2}, \quad (30.48)$$

possiamo scrivere

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dt}{d\theta}, \quad (30.49)$$

da cui segue la (30.47). ■

**30.29. LEMMA.** *Se  $L \neq 0$ , posto  $u = 1/\rho$ , l'orbita su cui si svolge il moto è descritta dall'equazione*

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[ V \left( \frac{1}{u} \right) \right], \quad (30.50)$$

che prende il nome di seconda forma dell'equazione delle orbite.

**30.30. Dimostrazione del lemma 30.29.** Poniamo  $u = 1/\rho$  e ricordiamo la (30.22), i.e.  $\dot{\theta} = L(\mu\rho^2)^{-1} = Lu^2/\mu$ . Utilizzando il fatto che le funzioni  $\theta = \theta(t)$  e  $u = u(\rho)$  sono invertibili (cfr. §30.29), abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left[ u^2 \left( \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \right] = -\frac{d}{d\theta} \left[ u^2 \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right) \right] = -\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \left[ \dot{\theta} \frac{d\rho}{d\theta} \right] \\ &= -\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{d\theta}{dt} \frac{d\rho}{d\theta} \right] = -\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \frac{d\rho}{dt} \\ &= -\frac{\mu}{L} \frac{dt}{d\theta} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu}{L\dot{\theta}} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{L^2u^2} \frac{d^2\rho}{dt^2} \equiv -\frac{\mu^2}{L^2u^2} \ddot{\rho}. \end{aligned} \quad (30.51)$$

Allora la (30.51) e l'identità

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = \frac{dV_{\text{eff}}}{du} \frac{du}{d\rho} = -u^2 \frac{dV_{\text{eff}}}{du}, \quad (30.52)$$

consentono di scrivere l'equazione radiale (30.29) nella forma

$$-\frac{L^2u^2}{\mu} \frac{d^2u}{d\theta^2} = \mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = u^2 \frac{dV_{\text{eff}}}{du}, \quad (30.53)$$

che implica la (30.51). ■

## 31. Campo centrale armonico e campo centrale coulombiano

**31.1. Introduzione.** Come abbiamo anticipato nell'osservazione §30.25 e come dimostreremo nel paragrafo successivo, il campo centrale armonico e il campo centrale coulombiano attrattivo sono gli unici casi in cui tutte le orbite limitate siano chiuse.

Al di là di tale (notevole) proprietà, tali campi centrali rivestono un ruolo particolarmente importante in Fisica, e quindi può essere utile studiarli in dettaglio. È quello che faremo nel presente paragrafo: studieremo il campo centrale armonico nei paragrafi §31.2÷§31.6 e il campo centrale coulombiano nei paragrafi §31.7÷§31.17. Per una discussione più approfondita della rilevanza di tali campi centrali rimandiamo ai testi elencati nella nota bibliografica.

**31.2. LEMMA.** *Dato un campo centrale armonico  $V(\rho) = k\rho^2$ , con  $k > 0$ , se  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$  tutte le orbite sono chiuse e limitate e hanno la forma di un'ellisse.*

**31.3. Dimostrazione del lemma 31.2.** Nel caso dell'energia potenziale armonica  $V(\rho) = k\rho^2$ , con  $k > 0$ , l'energia potenziale efficace è data da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = k\rho^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}, \quad (31.1)$$

che ha un unico minimo per

$$\rho_0 = \left( \frac{L^2}{2k\mu} \right)^{1/4}, \quad (31.2)$$

in corrispondenza del quale si ha

$$V_{\text{eff}}(\rho_0) = \sqrt{\frac{2kL^2}{\mu}} \equiv E_0. \quad (31.3)$$

Inoltre  $\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(\rho) = \infty$  e  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(\rho) = \infty$ : quindi per ogni valore dell'energia  $E > E_0$ , l'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho)$  ha due radici  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , date da

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{E}{2k}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}}, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{E}{2k}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}}, \quad (31.4)$$

dove  $E_0$  è definito in (31.3). Cfr. la figura 31.1.

Quindi dalle (30.47) e (31.1) otteniamo

$$\theta - \bar{\theta} = \int_{\bar{\rho}}^{\rho(\theta)} d\rho \frac{1}{\rho^2 \sqrt{(2\mu E/L^2) - \rho^{-2} - \rho^2 \rho_0^{-4}}}, \quad (31.5)$$

se  $(\bar{\theta}, \bar{\rho})$  è il dato iniziale, scelto in modo tale che valga il segno + in (30.47), e  $\theta$  è tale che  $\rho(\theta')$  si mantiene minore di  $\rho_2$  per ogni  $\theta \leq \theta' \leq \theta$ .

Attraverso la sostituzione

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{w}} \quad (31.6)$$

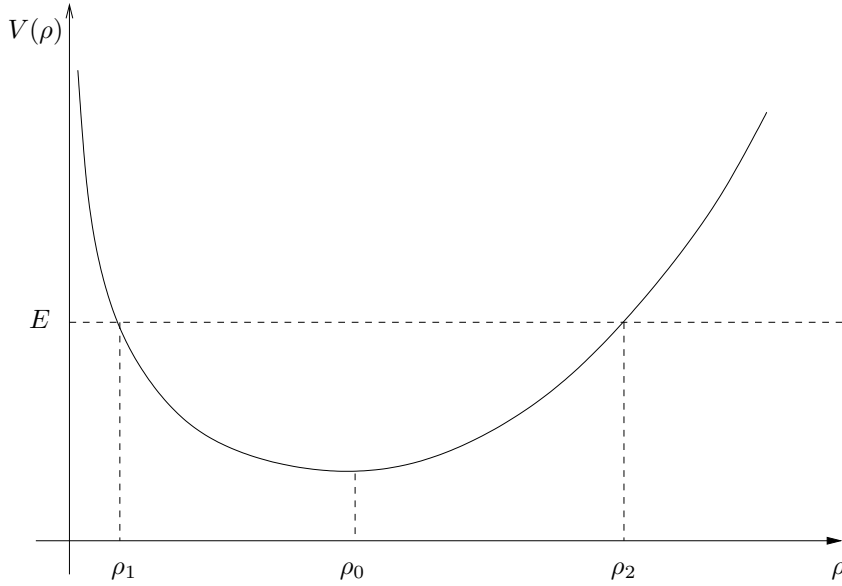


FIGURA 31.1. Grafico dell'energia potenziale efficace (31.1).

possiamo riscrivere la (31.5) come

$$\begin{aligned}
 \theta - \bar{\theta} &= \int_{\bar{\rho}}^{\rho(\theta)} d\rho \frac{1}{\rho^2 \sqrt{(2\mu E/L^2) - \rho^{-2} - \rho^2 \rho_0^{-4}}} \\
 &= - \int_{\bar{w}}^{w(\theta)} dw \frac{1}{2\sqrt{(2\mu E w/L^2) - \rho_0^{-4} - w^2}} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{w(\theta)}^{\bar{w}} dw \frac{1}{\sqrt{(w - w_1)(w_2 - w)}},
 \end{aligned} \tag{31.7}$$

dove

$$\bar{w} = \frac{1}{\bar{\rho}^2}, \quad w(\theta) = \frac{1}{\rho^2(\theta)}, \quad w_1 = \frac{1}{\rho_2^2}, \quad w_2 = \frac{1}{\rho_1^2}, \tag{31.8}$$

con  $w_1 \leq \bar{w} \leq w_2$  e  $\bar{w} = w(0)$ .

Se scegliamo l'asse polare in modo che sia  $\rho(\theta) = \rho_1$  per  $\theta = \bar{\theta} = 0$  e quindi  $\bar{w} = w(0) = w_2$ , la (31.7) dà

$$\theta = \frac{1}{2} \int_{w(\theta)}^{w_2} \frac{dw}{\sqrt{(w - w_1)(w_2 - w)}}. \tag{31.9}$$

Operando il cambiamento di variabili  $w \rightarrow z = w - w_1$  la (31.9) diventa

$$\theta = \frac{1}{2} \int_{w(\theta) - w_1}^{w_2 - w_1} \frac{dz}{\sqrt{z(w_2 - w_1 - z)}} \tag{31.10}$$



e operando il cambiamento di variabili  $z \rightarrow x = (w_2 - w_1)^{-1} z$  la (31.10) diventa

$$\theta = \frac{1}{2} \int_{x(\theta)}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad (31.11)$$

dove

$$x(\theta) = \frac{w(\theta) - w_1}{w_2 - w_1}. \quad (31.12)$$

La sostituzione  $x = \sin^2 \alpha$  in (31.11) dà quindi

$$\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha(\theta)}^{\pi/2} d\alpha \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}} = \int_{\alpha(\theta)}^{\pi/2} d\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha(\theta), \quad (31.13)$$

dove

$$\alpha(\theta) = \arcsin \sqrt{x(\theta)} = \arcsin \sqrt{\frac{w(\theta) - w_1}{w_2 - w_1}}. \quad (31.14)$$

Quindi abbiamo

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \arcsin \sqrt{\frac{w(\theta) - w_1}{w_2 - w_1}}, \quad (31.15)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{w(\theta) - w_1}{w_2 - w_1} \\ &= \left( \frac{1}{\rho^2(\theta)} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \left( \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (31.16)$$

*i.e.*, tenendo conto che  $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2(\theta)} &= \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) (1 + \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (31.17)$$

Si verifica facilmente a partire dalle (31.4) che

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) &= \frac{4kE}{E_0^2}, \\ \left( \frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) &= \frac{4kE}{E_0^2} \sqrt{1 - \left( \frac{E_0}{E} \right)^2}, \end{aligned} \quad (31.18)$$

così che la (31.17) dà

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2(\theta)} &= \frac{2kE}{E_0^2} \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{E_0}{E} \right)^2} \cos 2\theta \right) \\ &= \frac{\mu E}{L^2} \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{E_0}{E} \right)^2} \cos 2\theta \right), \end{aligned} \quad (31.19)$$

essendosi tenuto conto della definizione di  $E_0$  in (31.3). Se definiamo

$$A^2 = \frac{E_0^2}{2kE} = \frac{L^2}{\mu E}, \quad e = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}, \quad (31.20)$$

possiamo riscrivere la (31.19) nella forma

$$\rho(\theta) = \frac{A}{\sqrt{1 + e \cos 2\theta}}. \quad (31.21)$$

La (31.21), ottenuta sotto la condizione che fosse  $\rho(\theta') \leq \rho_2$  per ogni  $0 = \bar{\theta} \leq \theta' \leq \theta$ , vale in realtà per ogni valore di  $\theta$ , come si può espressamente verificare.

La (31.21) è l'equazione di un'ellisse con semiasse di lunghezza  $\rho_1$  e  $\rho_2$ ; cfr. la figura 31.2.

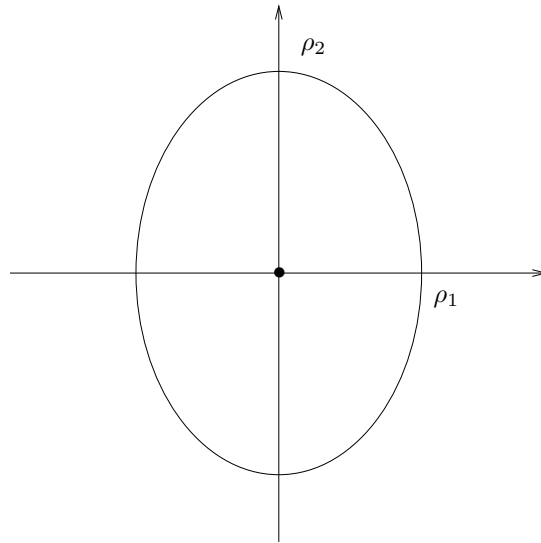


FIGURA 31.2. Orbita ellittica nel caso del campo centrale armonico. Con le notazioni del lemma 30.21 si ha  $\Delta\theta/2\pi = 1/2$ .

Infatti in coordinate cartesiane, tenendo conto che

$$\rho^2 = r_1^2 + r_2^2, \quad \rho^2 \cos 2\theta = \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r_1^2 - r_2^2, \quad (31.22)$$

con  $\rho = \rho(\theta)$ , si ha dalla (31.21)

$$A^2 = \rho^2 (1 + e \cos 2\theta) = (r_1^2 + r_2^2) + e (r_1^2 - r_2^2), \quad (31.23)$$

da cui si ricava

$$\frac{r_1^2}{A^2}(1+e) + \frac{r_2^2}{A^2}(1-e) = 1. \quad (31.24)$$

Poiché  $e < 1$  la (31.24) è a vista l'equazione di un'ellisse con centro nell'origine e semiassi di lunghezza  $a = A/\sqrt{1-e}$  e  $b = A/\sqrt{1+e}$ . Un semplice conto dimostra che le lunghezze  $a$  e  $b$  dei semiassi sono date da

$$\begin{aligned} a &= \frac{L^2}{\mu E} \frac{1}{\sqrt{1-e}} = \frac{L^2}{\mu E} \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{E}{2k} \sqrt{1+e} = \rho_2, \\ b &= \frac{L^2}{\mu E} \frac{1}{\sqrt{1+e}} = \frac{L^2}{\mu E} \frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{E}{2k} \sqrt{1-e} = \rho_1, \end{aligned} \quad (31.25)$$

dove si sono usate le (31.3), mentre l'eccentricità  $\varepsilon$  è data da

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{2e}{1+e}}. \quad (31.26)$$

Il lemma è quindi dimostrato. ■

**31.4. Osservazione.** Se avessimo utilizzato fin dal principio coordinate cartesiane per il moto nel piano ortogonale al momento angolare  $\mathbf{L}$  (che stiamo supponendo diverso da zero) la discussione sarebbe stata più semplice.

Infatti in coordinate cartesiane (nel piano su cui si svolge il moto) il sistema ha energia

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) + k(r_1^2 + r_2^2). \quad (31.27)$$

Scegliamo i dati iniziali nella forma

$$\begin{cases} r_1(0) = \rho_1, & r_2(0) = 0, \\ \dot{r}_1(0) = 0, & \dot{r}_2(0) = v_0, \end{cases} \quad (31.28)$$

dove  $v_0$  è tale che

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 + k\rho_1^2 = E, \quad (31.29)$$

se  $E$  è l'energia (31.27) del sistema. La scelta della velocità iniziale nella forma (31.28) è imposta dalle seguenti considerazioni: se  $r_1(0) = \rho_1$  deve risultare  $\dot{\rho}(0) = 0$  (poiché  $\dot{\rho}(t) = 0$  se  $E - V_{\text{eff}}(\rho(t)) = 0$  e  $\rho_1$  è una radice dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ ), quindi la velocità iniziale deve avere direzione tangenziale, *i.e.* essere ortogonale al vettore  $\mathbf{e}_\rho$  all'istante  $t = 0$ ; d'altra parte a  $t = 0$  il vettore  $\mathbf{e}_\rho$  è parallelo a  $\mathbf{r}(t)$ , quindi è diretto lungo l'asse  $r_1$ , così che la velocità iniziale deve essere diretta lungo l'asse  $r_2$ .

Quindi si hanno due equazioni del moto disaccoppiate

$$\begin{cases} \mu\ddot{r}_1 = -2kr_1, \\ \mu\ddot{r}_2 = -2kr_2, \end{cases} \quad (31.30)$$

così che la soluzione, tenuto conto delle condizioni iniziali (31.28), è data da

$$\begin{cases} r_1(t) = \rho_1 \cos \omega t, \\ r_2(t) = (v_0/\omega) \sin \omega t, \end{cases} \quad (31.31)$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{\mu}}; \quad (31.32)$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{\omega} &= \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - k\rho_1^2) \frac{\mu}{2k}} = \sqrt{\frac{E}{k} - \rho_1^2} = \sqrt{\frac{E}{k} - \frac{E}{2k} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{E}{2k} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}\right)} = \rho_2, \end{aligned} \quad (31.33)$$

dove si sono utilizzate le definizioni (31.4) di  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Possiamo quindi riscrivere le (31.20) come

$$\begin{cases} r_1(t) = \rho_1 \cos \omega t, \\ r_2(t) = \rho_2 \sin \omega t, \end{cases} \quad (31.34)$$

così che si ha

$$\frac{r_1^2}{\rho_1^2} + \frac{r_2^2}{\rho_2^2} = 1, \quad (31.35)$$

che è appunto l'equazione di un'ellisse con semiassi di lunghezza  $\rho_1$  e  $\rho_2$  (cfr. la (31.24)).

Notiamo che la scelta dei dati iniziali è consistente con la scelta fatta dell'asse polare fatta prima della (31.9).

Le stesse conclusioni ottenute lavorando in coordinate polari si possono quindi trovare (molto più rapidamente) lavorando direttamente in coordinate cartesiane. Questo dimostra che le coordinate cartesiane sono coordinate "più naturali" per la discussione del moto di due punti materiali che interagiscono attraverso un potenziale armonico.

Si può quindi considerare la discussione fatta in §31.3 come un'utile applicazione della teoria sviluppata in §5.1 in un caso in cui è possibile effettuare i conti in dettaglio e risolvere esplicitamente le equazioni del moto. Se da una parte la discussione è più semplice lavorando in coordinate cartesiane, dall'altra è lavorare in coordinate polari in un caso che si sa risolvere esplicitamente può essere considerato un utile esercizio che permette di capire più a fondo alcuni aspetti dei moti centrali.

**31.5. COROLLARIO.** *Nel caso di un campo centrale armonico tutte le orbite sono*

ellissi con centro l'origine.

**31.6.** *Dimostrazione del corollario 31.5.* Segue dal lemma 31.2, in particolare dalla (31.24), che esprime l'orbita come equazione di un'ellisse con centro l'origine. ■

**31.7.** LEMMA. *Sia  $V(\rho) = -k/\rho$ , con  $k > 0$ . Se  $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$  allora tutte le orbite limitate sono chiuse e hanno la forma di un'ellisse.*

**31.8.** *Dimostrazione del lemma 31.7.* L'energia potenziale efficace corrispondente all'energia potenziale coulombiana  $-k/\rho$ , con  $k > 0$ , è data da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}. \quad (31.36)$$

Poiché vale la (30.40), il lemma 30.18 implica  $\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(\rho) = \infty$  (cfr. anche l'osservazione 30.20). Inoltre  $V_{\text{eff}}(\rho)$  ha un unico minimo in

$$\rho_0 = \frac{L^2}{\mu k}, \quad (31.37)$$

in corrispondenza del quale si ha

$$V_{\text{eff}}(\rho_0) = -\frac{\mu k^2}{2L^2} \equiv E_0. \quad (31.38)$$

Inoltre esiste un unico zero di  $V_{\text{eff}}(\rho_0)$ , in  $\rho = \rho_0/2$ , e si ha  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0^-$ . Cfr. la figura 31.3.

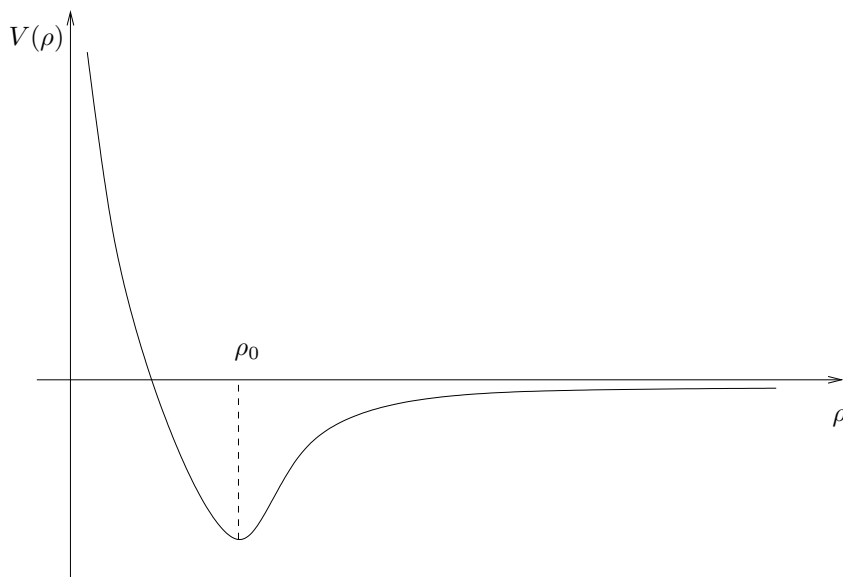


FIGURA 31.3. Grafico dell'energia potenziale efficace (31.36).

Indichiamo con  $E$  l'energia totale del moto radiale, *i.e.*

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 - \frac{k}{\rho} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}. \quad (31.39)$$

Quindi se  $E = E_0$  si ha un moto circolare uniforme (cfr. il lemma 30.16). Se  $0 > E > E_0$  le orbite descritte da  $\rho(t)$  sono chiuse e le corrispondenti traiettorie sono periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ :  $\rho(t)$  oscilla tra un valore minimo  $\rho_1$  e un valore massimo  $\rho_2$ , dove

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{L^2}{\mu k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \right)^{-1} = \rho_0 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}} \right)^{-1}, \\ \rho_2 &= \frac{L^2}{\mu k} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \right)^{-1} = \rho_0 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (31.40)$$

sono le radici dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ . Se  $E = 0$  si ha  $\rho(t) \geq \rho_0/2$  e si ha un'orbita aperta tale che

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \rho(t) &= \infty, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{\rho}(t) &= 0^\pm. \end{aligned} \quad (31.41)$$

Se  $E > 0$  si ha  $\rho(t) \geq \rho_1$ , dove

$$\rho_1 = \frac{L^2}{\mu k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \right)^{-1}, \quad (31.42)$$

e si ha sempre un'orbita aperta tale che

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \rho(t) &= \infty, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{\rho}(t) &= \pm \sqrt{\frac{2E}{\mu}}. \end{aligned} \quad (31.43)$$

Per determinare esattamente la forma delle orbite possiamo procedere come segue. Dalla (30.47) si ha

$$\theta - \bar{\theta} = \int_{\bar{\rho}}^{\rho(\theta)} d\rho \frac{1}{\rho^2 \sqrt{(2\mu E/L^2) - \rho^{-2} + 2\rho^{-1}\rho_0^{-1}}}, \quad (31.44)$$

se  $(\bar{\theta}, \bar{\rho})$  è il dato iniziale, scelto in modo tale che valga il segno  $+$  in (30.47), e  $\theta$  è tale che  $\rho(\theta')$  si mantiene minore di  $\rho_2$  per ogni  $\bar{\theta} \leq \theta' \leq \theta$ .

Scegliamo l'asse polare in modo che sia  $\rho(\theta) = \rho_1$  per  $\theta = \bar{\theta} = 0$ . Notiamo che  $\rho_1$  è definito per ogni valore di  $E \geq E_0$  ed è sempre dato dalla (31.42), come si

vede confrontando la (31.40) con la (31.42) e tenendo conto che la (31.42) si riduce a  $\rho_1 = \rho_0/2$  per  $E = 0$ .

Operando la sostituzione

$$\rho = \frac{1}{w}, \quad (31.45)$$

si ha, utilizzando la scelta del dato iniziale sopra indicata,

$$\begin{aligned} \theta = \theta - \bar{\theta} &= - \int_{w_2}^{w(\theta)} dw \frac{1}{\sqrt{(2\mu E/L^2) - w^2 + 2w\rho_0^{-1}}} \\ &= \int_{w(\theta)}^{w_2} dw \frac{1}{\sqrt{(2\mu E/L^2) - w^2 + 2w\rho_0^{-1}}}, \end{aligned} \quad (31.46)$$

dove  $w_1 = 1/\rho_2$  e  $w_2 = 1/\rho_1$ .

Ponendo

$$A = \frac{2\mu E}{L^2}, \quad B = \frac{1}{\rho_0} = \frac{\mu k}{L^2}, \quad (31.47)$$

e scrivendo

$$\begin{aligned} \frac{2\mu E}{L^2} - w^2 + 2\frac{w}{\rho_0} &= A + 2Bw - w^2 = A - (w - B)^2 + B^2 \\ &= (A + B^2) - (w - B)^2 \\ &= (A + B^2) \left[ 1 - \left( \frac{w - B}{\sqrt{A + B^2}} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (31.48)$$

si vede che, attraverso la sostituzione

$$z = \frac{w - B}{\sqrt{A + B^2}} = \frac{(w/B) - 1}{\sqrt{1 + A/B^2}} = \left( 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \right)^{-1/2} \left( \frac{L^2}{\mu k} w - 1 \right), \quad (31.49)$$

la (31.46) diventa

$$\theta = \int_{z(\theta)}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (31.50)$$

dove

$$\begin{aligned} z_2 &= \left( 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \right)^{-1/2} \left( \frac{L^2}{\mu k} w_2 - 1 \right) = \left( 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \right)^{-1/2} \left( \frac{L^2}{\mu k \rho_1} - 1 \right) \\ &= \left( 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \right)^{-1/2} \left( 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \right)^{1/2} = 1. \end{aligned} \quad (31.51)$$

La (31.50) si integra immediatamente. Ponendo  $z = \cos \alpha$ , così che  $\alpha(\theta) = \arccos z(\theta)$  e

$$\theta = \int_{z(\theta)}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = - \int_{\alpha(\theta)}^{\alpha_2} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \int_{\alpha_2}^{\alpha(\theta)} d\alpha, \quad (31.52)$$

così che, tenendo conto che

$$\alpha_2 \equiv \arccos z_2 = \arccos 1 = 0, \quad (31.53)$$

si ottiene

$$\theta = \alpha(\theta) - \alpha_2 = \arccos z(\theta) = \arccos \left[ \left( 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \right)^{-1/2} \left( \frac{L^2}{\mu k \rho(\theta)} - 1 \right) \right]. \quad (31.54)$$

Se definiamo

$$\begin{aligned} p &= \frac{L^2}{\mu k}, \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}, \end{aligned} \quad (31.55)$$

possiamo scrivere la (31.54) nella forma

$$\theta = \arccos \left[ \frac{1}{e} \left( \frac{p}{\rho} - 1 \right) \right], \quad (31.56)$$

e quindi esplicitare  $\rho = \rho(\theta)$  in termini di  $\theta$  come

$$\frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta). \quad (31.57)$$

La (31.57), ottenuta sotto la condizione che fosse  $\rho(\theta') \leq \rho_2$  per ogni  $0 = \bar{\theta} \leq \theta' \leq \theta$ , vale in realtà per ogni valore di  $\theta$ , come è facile verificare (cfr. l'analoga discussione riguardo alla (31.21)).

La (31.57) è l'equazione di una *conica* con eccentricità  $e$  e un fuoco nell'origine. Infatti possiamo riscrivere la (31.57) come

$$\rho = p - e\rho \cos \theta = p - er_1, \quad (31.58)$$

quindi

$$\rho^2 = r_1^2 + r_2^2 = p^2 + e^2 r_1^2 - 2per_1, \quad (31.59)$$

che possiamo riscrivere

$$(1 - e^2) r_1^2 + r_2^2 + 2per_1 - p^2 = 0. \quad (31.60)$$

Ricordiamo che un'equazione della forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (31.61)$$

è l'equazione di una *conica* (cfr. la nota bibliografica). Se definiamo il *discriminante*

$$\Delta = B^2 - 4AC, \quad (31.62)$$



la conica descritta dalla (31.61) corrisponde a un'ellisse se  $\Delta < 0$ , a un'iperbole se  $\Delta > 0$  e a una parabola se  $\Delta = 0$ . Si vede quindi che se  $e \in [0, 1)$  la conica è un'ellisse, se  $e = 1$  è una parabola e se  $e \in (1, \infty)$  è un'iperbole. Quindi l'orbita è limitata solo per  $e < 1$  e in tale caso è chiusa essendo un'ellisse. ■

**31.9. Osservazione.** Per determinare la forma delle orbite si può anche procedere nel modo seguente.

Se poniamo  $u = 1/\rho$ , la seconda forma dell'equazione delle orbite (30.50) diventa

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{k\mu}{L^2}, \quad (31.63)$$

la cui soluzione è data dalla somma dell'integrale dell'equazione omogenea associata  $u = A \cos(\theta - \theta_0)$  più una soluzione particolare dell'equazione non omogenea  $u = 1/p$ , dove  $p = L^2/(k\mu) = \rho_0$ .

La soluzione  $u = 1/p$  corrisponde all'unica orbita circolare di raggio  $\rho_0 = p$  (unica perché è unico il punto di minimo del potenziale efficace). Scrivendo la costante  $A$  come  $A = e/p = e/\rho_0$ , abbiamo allora

$$\frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{1}{p} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)), \quad (31.64)$$

che è l'equazione di una conica con eccentricità  $e$  e un fuoco nell'origine (cfr. la nota bibliografica).

**31.10. Osservazione.** L'energia potenziale  $V(\rho) = -k/\rho$  è nota come energia potenziale coulombiana (attrattiva se  $k > 0$  e repulsiva se  $k < 0$ ). Il caso attrattivo descrive un campo centrale gravitazionale (o kepleriano) o coulombiano attrattivo (interazione elettrica tra due cariche di segno opposto), mentre il caso repulsivo descrive solo un campo centrale coulombiano repulsivo (interazione elettrica tra due cariche aventi lo stesso segno).

**31.11. COROLLARIO.** *Nel caso di un campo centrale coulombiano attrattivo tutte le orbite chiuse sono ellissi con uno dei fuochi nell'origine.*

**31.12. Dimostrazione del corollario 31.11.** Segue dal lemma 31.2, in particolare dalla (31.60), che esprime l'orbita come equazione di un'ellisse. Possiamo portare facilmente (tenendo conto che non compaiono termini misti, *i.e.* che dipendano simultaneamente da  $r_1$  e  $r_2$ ) l'equazione (31.60) in *forma canonica*, *i.e.* nella forma

$$\frac{(r_1 - r_{01})^2}{a^2} + \frac{(r_2 - r_{02})^2}{b^2} = 1, \quad (31.65)$$

scrivendo la (31.60) come

$$\frac{(1 - e^2)^2}{p^2} \left( r_1 + \frac{pe}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{1 - e^2}{p^2} r_2^2 = 1. \quad (31.66)$$

Dal confronto con la (31.65) si vede che si tratta di un'ellisse con centro in

$$C = \left( -\frac{ep}{1-e^2}, 0 \right), \quad (31.67)$$

semiassi di lunghezza

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{pa} = a\sqrt{1-e^2} \quad (31.68)$$

ed eccentricità

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e. \quad (31.69)$$

La distanza tra il centro  $C$  e i due fuochi  $F_1$  e  $F_2$  è data da

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = ea = \frac{ep}{1-e^2}, \quad (31.70)$$

così che le coordinate dei fuochi sono

$$F_1 = \left( -\frac{2ep}{1-e^2}, 0 \right), \quad F_2 = (0, 0); \quad (31.71)$$

uno dei due fuochi coincide quindi con l'origine. Cfr. la figura 31.4. ■

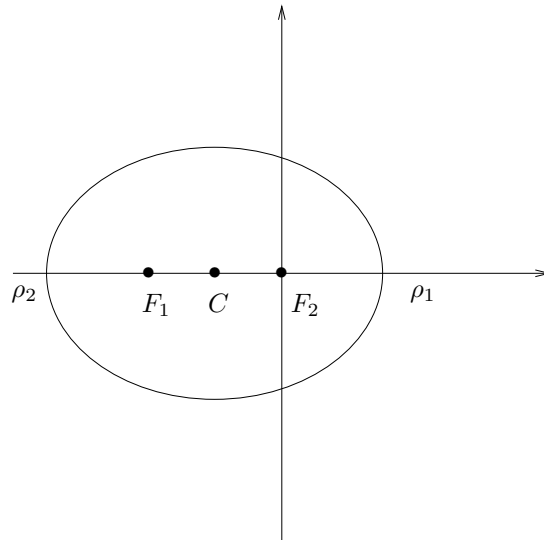


FIGURA 31.4. Orbita ellittica nel caso del campo centrale coulombiano. Con le notazioni del lemma 30.21 si ha  $\Delta\theta/2\pi = 1$ .

**31.13. COROLLARIO.** *Nel caso di un campo centrale coulombiano attrattivo le orbite aperte sono parabole o iperboli con un fuoco nell'origine.*

**31.14. Dimostrazione del corollario 31.13.** Si hanno orbite aperte se  $E \geq 0$  (cfr. la discussione all'inizio di §31.8). L'equazione che determina le orbite è sempre la (31.60).

Se  $E = 0$  si ha  $e = 1$  (per la (31.55)), quindi la (31.60) diventa

$$r_2^2 + 2pr_1 - p^2 = 0. \quad (31.72)$$

che è l'equazione di una parabola con fuoco nell'origine e vertice in

$$V = \left(\frac{p}{2}, 0\right). \quad (31.73)$$

Cfr. la figura 31.5.

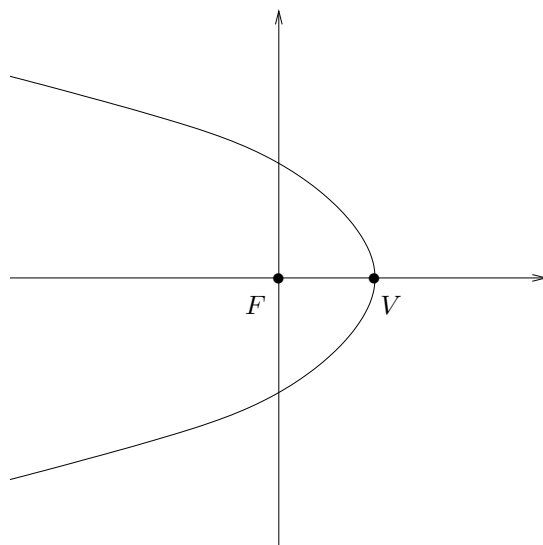


FIGURA 31.5. Orbita parabolica nel caso del campo centrale coulombiano.

Se  $E > 0$  si ha  $e > 1$  (per la (31.55)) e, portando la (31.60) nella forma canonica (31.66), che si può riscrivere come

$$\frac{(e^2 - 1)^2}{p^2} \left(r_1 - \frac{pe}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{e^2 - 1}{p^2} r_2^2 = 1. \quad (31.74)$$

si vede che è l'equazione di un'iperbole con centro in

$$C = \left( \frac{ep}{e^2 - 1}, 0 \right), \quad (31.75)$$

semiassi di lunghezza

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} = a\sqrt{e^2 - 1} \quad (31.76)$$

e fuochi in

$$F_1 = (0, 0), \quad F_2 = \left( \frac{2ep}{e^2 - 1}, 0 \right). \quad (31.77)$$

Si noti in particolare che di nuovo uno dei due fuochi è nell'origine. Cfr. la figura 31.6. ■

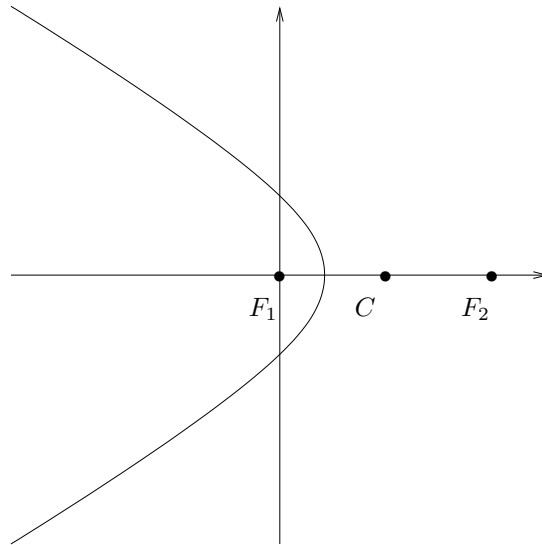


FIGURA 31.6. Orbita iperbolica nel caso del campo centrale coulombiano.

**31.15. Leggi di Keplero.** Consideriamo i moti dei pianeti del sistema solare supponendo che l'unica forza che agisce su ciascun pianeta sia la sola forza gravitazionale del sole. Valgono allora le seguenti leggi.

- (1) Le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il centro della forza occupa uno dei fuochi.
- (2) Se definiamo la velocità areolare  $V_A$  come l'area del settore dell'ellisse delimitata dal raggio vettore  $\mathbf{r}(t)$  nell'unità di tempo, allora  $V_A$  è costante.

(3) Il quadrato del periodo del moto è proporzionale al cubo della lunghezza del semi-asse maggiore dell'orbita.

**31.16.** *Dimostrazione delle leggi di Keplero.* L'energia potenziale gravitazionale è della forma

$$V(\rho) = -\frac{Gm_1m_2}{\rho}, \quad (31.78)$$

dove  $m_1$  e  $m_2$  sono le masse dei due corpi interagenti ( $m_1$  è la massa del sole e  $m_2$  è la massa del pianeta) e  $G$  è la costante di gravitazione universale.

La legge (1) è conseguenza del corollario 31.11. Infatti tale corollario implica che il vettore  $\mathbf{r}$  descrive nel piano  $(r_1, r_2)$  un'ellisse con uno dei fuochi nell'origine. Se  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  denotano i vettori che individuano il sole e il pianeta, rispettivamente, possiamo allora esprimere tali vettori in termine della coordinate del centro di massa  $\mathbf{R}$  e della coordinata relativa  $\mathbf{r}$ : abbiamo  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} + (m_1/M)\mathbf{r}$  e  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R} - (m_2/M)\mathbf{r}$ , dove  $M = m_1 + m_2$ . Quindi nel sistema del centro di massa ( $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ), i vettori  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  sono entrambi proporzionali a  $\mathbf{r}$ . Quindi, in tale sistema di riferimento, sia il sole sia il pianeta descrivono delle ellissi, che hanno entrambe uno dei fuochi coincidenti con il centro di massa. Si noti che anche il moto del pianeta rispetto al sole descrive un'ellisse, dal momento che  $\mathbf{r}$  rappresenta proprio la coordinata del pianeta rispetto al sole.

Per definizione di velocità areolare, se definiamo  $A(t)$  come l'area del settore dell'ellisse delimitata dal raggio vettore  $\mathbf{r}(t)$  dal tempo iniziale  $t_0$  al tempo  $t$ , si ha (cfr. l'esercizio 5)

$$A(t+h) - A(t) = \frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}(t)h + O(h^2), \quad h \in \mathbb{R}, \quad (31.79)$$

così che

$$V_A(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = \frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}(t) = \frac{L}{2\mu}, \quad (31.80)$$

che implica che  $V_A \equiv V_A(t)$  è costante poiché  $L$  è costante (cfr. il lemma 30.9). Quindi anche la legge (2) è dimostrata.

Infine il periodo  $T$  del moto, poiché  $V_A$  è costante, si può scrivere come

$$T = \frac{\text{area dell'ellisse}}{\text{velocità areolare}} = \frac{\pi ab}{V_A} = \frac{2\mu\pi ab}{L}, \quad (31.81)$$

dove  $a$  e  $b$  sono le lunghezze dei semiassi dell'ellisse (cfr. l'esercizio 6). Se ricordiamo la relazione (31.68) che lega  $a$  a  $b$  e la definizione (31.55) di  $p$ , otteniamo

$$T = \frac{2\mu\pi ab}{L} = \frac{2\mu\pi a^{3/2}\sqrt{p}}{L} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}a^{3/2}, \quad (31.82)$$

da cui segue la legge (3). ■

**31.17.** *Osservazione.* La costante di gravitazione universale è data da  $G = 6.67 \times 10^{-8}$  cm<sup>3</sup>/g sec<sup>2</sup>. Ordinariamente la massa del sole  $m_1$  è molto più grande della massa dei

pianeti ( $m_1 = 1.99 \times 10^{33}$  g, mentre  $m_2 = 1.90 \times 10^{30}$  g per Giove,  $m_2 = 5.98 \times 10^{27}$  g per la Terra, etc.): se si approssima  $m_2 \gg m_1$  ponendo  $m_2 = \infty$ , si ha che la massa ridotta è essenzialmente data dalla massa del pianeta, *i.e.*  $\mu = m_1$ , e si può assumere che il sole occupi il centro della forza, quindi uno dei due fuochi dell'ellisse.

**31.18. Osservazione.** Se  $\Delta\theta$  indica l'incremento della variabile  $\theta$  in un periodo del moto della variabile  $\rho$  (usando le notazioni del lemma 30.13), il corollario 31.5 implica  $\Delta\theta = \pi/2$  per il campo centrale armonico, mentre il corollario 31.11 implica  $\Delta\theta = \pi$  per il campo centrale coulombiano attrattivo.

## 32. Teorema di Bertrand

**32.1. Introduzione.** Come notato nell'osservazione 30.25, dato un campo centrale, appare eccezionale che le orbite limitate siano sempre chiuse indipendentemente da come siano stati fissati i dati iniziali. Nel paragrafo precedente abbiamo verificato esplicitamente che il campo centrale armonico e il campo centrale coulombiano (attrattivo) soddisfano tali proprietà. Faremo vedere nel presente paragrafo che essi sono anche gli unici campi centrali a soddisfarla: questo è il contenuto del teorema 32.21, che dimostreremo attraverso una serie di lemmi intermedi.

Il teorema 32.21 è un risultato notevole. Dimostrare che il campo centrale armonico e il campo centrale coulombiano verificano la proprietà che tutte le orbite limitate sono chiuse non ha richiesto che un conto esplicito per delle energie potenziali assegnate: questo potrà essere laborioso quanto si vuole, ma, concettualmente, non presenta alcuna difficoltà. Al contrario l'affermazione che non esistono altri campi centrali per i quali tale proprietà siano verificate non può essere dimostrata banalmente effettuando dei conti con funzioni date ed è, quindi, da un punto di vista filosofico, molto più sorprendente.

**32.2. Notazioni.** Consideriamo il sistema unidimensionale descritto dall'equazione (30.29) e sia  $\rho = \rho_0$  l'orbita circolare corrispondente al minimo  $\rho_0$  della funzione (30.28).

In generale se  $\rho(t)$  varia periodicamente in funzione del tempo in un intervallo  $[\rho_1, \rho_2]$ , chiameremo  $\rho_1$  *pericentro* e  $\rho_2$  *apocentro* dell'orbita. Indichiamo con  $T$  il tempo che impiega  $\rho(t)$  per passare dal valore  $\rho_1$  al valore  $\rho_2$  (e viceversa) e con  $\Theta$  la variazione di  $\theta$  nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ : quindi  $T$  è il semiperiodo di  $\rho(t)$  e  $\Theta$  è l'angolo tra pericentro e apocentro. Con le notazioni del lemma 30.21, si ha  $T_0 = 2T$  e  $\Delta\theta = 2\Theta_0$ .

Data una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ , indichiamo con  $f'(x_0)$  la derivata prima di  $f$  in  $x = x_0$ , e con  $f''(x_0)$  la derivata seconda di  $f$  in  $x = x_0$ .

**32.3. LEMMA.** *L'orbita circolare corrispondente al minimo  $\rho_0$  del potenziale efficace*

$V_{\text{eff}}(\rho)$  è stabile secondo Lyapunov.

**32.4. Dimostrazione del lemma 32.3.** Poiché  $\rho_0$  è un punto di minimo per  $V_{\text{eff}}(\rho)$ , allora  $\rho_0$  è un punto d'equilibrio stabile per il moto di  $\rho(t)$ , *i.e.* per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che, comunque sia scelto un dato iniziale  $(\rho(0), \dot{\rho}(0))$  che verifichi  $|\rho(0) - \rho_0| < \delta$  e  $|\dot{\rho}(0)| < \delta$ , risulta  $|\rho(t) - \rho_0| < \varepsilon$  e  $|\dot{\rho}(t)| < \varepsilon$ . La prima condizione, in particolare, implica che l'orbita circolare  $\rho = \rho_0$  è stabile. ■

**32.5. Osservazione.** Ogni dato iniziale per il moto planare descritto dalla seconda equazione in (30.10) può essere individuato dando i valori  $(\bar{\rho}, \bar{\theta}, \dot{\bar{\rho}}, \dot{\bar{\theta}})$ . D'altra parte la conservazione del momento angolare (cfr. la (30.22)) permette di fissare la velocità angolare iniziale  $\dot{\bar{\theta}}$  attraverso  $L$ . Dato  $\bar{\rho}$ , se fissiamo il valore di energia  $E$  in (30.27), il valore della velocità radiale iniziale  $\dot{\bar{\rho}}$  risulta determinato (a meno del segno). Supponiamo anche di fissare un sistema di riferimento in cui  $\bar{\theta} = 0$ : poiché l'energia potenziale  $V(\rho)$  non dipende da  $\theta$  il valore  $\bar{\theta}$  sarà assolutamente irrilevante. In conclusione possiamo individuare il dato iniziale del sistema dando i valori  $(L, E, \bar{\rho})$  e fissando il segno della velocità iniziale. Notiamo in particolare che, cambiando  $L$ , cambia l'energia potenziale efficace (30.28), quindi cambia la posizione di un eventuale minimo  $\rho_0 = \rho_0(L)$ . Notiamo anche che i valori  $(L, E, \bar{\rho})$  non possono essere scelti in modo del tutto indipendente: per esempio fissato  $L$  si deve avere  $E \geq \min V_{\text{eff}}(\rho) = V_{\text{eff}}(\rho_0(L))$  e, fissati  $L, E$ , si deve avere  $\bar{\rho}$  tale che  $V_{\text{eff}}(\bar{\rho}) \leq E$ .

**32.6. LEMMA.** Sia  $\rho_0$  un minimo del potenziale efficace  $V_{\text{eff}}(\rho)$ . Fissato  $\varepsilon \geq 0$ , consideriamo un'orbita che disti entro  $O(\varepsilon)$  dall'orbita circolare corrispondente a  $\rho_0$ : sia  $E(\varepsilon) = V_{\text{eff}}(\rho_0) + \varepsilon^2$  l'energia corrispondente al moto della variabile radiale. L'angolo  $\Theta \equiv \Theta_\varepsilon$  tra il pericentro e l'apocentro dell'orbita tende al valore

$$\Theta_0 = \frac{\pi L}{\rho_0^2 \sqrt{\mu V_{\text{eff}}''(\rho_0)}} = \pi \sqrt{\frac{V'(\rho_0)}{\rho_0 V''(\rho_0) + 3V'(\rho_0)}}, \quad (32.1)$$

per  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**32.7. Dimostrazione del lemma 32.6.** Per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo l'orbita considerata è chiusa e quindi la traiettoria corrispondente è periodica (cfr. la discussione dei moti unidimensionali). L'angolo  $\Theta_\varepsilon$  è dato dalla variazione della variabile  $\theta$  in un semiperiodo del moto della variabile  $\rho(t)$ , *i.e.* nel tempo necessario perché la variabile  $\rho(t)$  passi dal valore minimo  $\rho_1$  al valore massimo  $\rho_2$  (o viceversa). Quindi per la (30.47)

$$\Theta_\varepsilon = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \frac{L}{\mu \rho^2} \frac{1}{\sqrt{2\mu^{-1} [E(\varepsilon) - V_{\text{eff}}(\rho)]}}, \quad (32.2)$$

dove  $E(\varepsilon) = V_{\text{eff}}(\rho_0) + \varepsilon^2$  è il valore dell'energia che corrisponde all'orbita considerata (tale che, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $E(\varepsilon) \rightarrow V_{\text{eff}}(\rho_0)$ ).

Possiamo quindi interpretare  $\Theta_\varepsilon$  come il semiperiodo del sistema meccanico unidimensionale di massa  $\mu$  con energia potenziale  $V_{\text{eff}}(\rho)$  ed energia totale  $E(\varepsilon)$ : tale

sistema è descritto dalla prima forma dell'equazione delle orbite (cfr. la (30.47))

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu} [E(\varepsilon) - V_{\text{eff}}(\rho)]}. \quad (32.3)$$

Se introduciamo la variabile

$$x = \frac{L}{\rho\sqrt{\mu}}, \quad (32.4)$$

e poniamo

$$W(x) = V_{\text{eff}}\left(\frac{L}{x\sqrt{\mu}}\right) = V\left(\frac{L}{x\sqrt{\mu}}\right) + \frac{x^2}{2}, \quad (32.5)$$

la (32.3) diventa

$$\frac{dx}{d\theta} = \pm \sqrt{2[E(\varepsilon) - W(x)]}, \quad (32.6)$$

Tenuto conto che  $|\rho(t) - \rho_0| \leq \varepsilon$  e che a noi interessa il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se  $x_0 = L\rho_0^{-1}/\sqrt{\mu}$ , risulta  $|x(t) - x_0| < c\varepsilon$ , per qualche costante  $c$ , e possiamo quindi scrivere la (32.6) come

$$\frac{dx}{d\theta} = \pm \sqrt{2\left[E(\varepsilon) - W(x_0) - \frac{1}{2}W''(x_0)(x - x_0)^2 + O(\varepsilon^3)\right]}. \quad (32.7)$$

dove  $W(x_0) = V_{\text{eff}}(\rho_0)$  e  $O(\varepsilon^3)$  indica una funzione regolare di  $x$  e di  $x_0$  (per la dipendenza differenziabile dai dati iniziali), che tende a zero, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , almeno come  $\varepsilon^3$ . Se definiamo  $\xi = (x - x_0)/\varepsilon$ , nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  otteniamo

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \pm \sqrt{2\left[1 - \frac{1}{2}W''(x_0)\xi^2\right]}. \quad (32.8)$$

che è l'equazione di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}W''(x_0)\xi^2 = 1 \quad (32.9)$$

per il sistema unidimensionale descritto dall'equazione del moto

$$\frac{d^2\xi(\theta)}{d\theta^2} + \omega^2\xi(\theta) = 0, \quad \omega = \sqrt{W''(x_0)}. \quad (32.10)$$

Si ha

$$\begin{aligned} W''(x) &= \frac{d^2}{dx^2}W(x) = \frac{d}{dx} \left[ \frac{d\rho}{dx} \frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} \right] = \frac{d\rho}{dx} \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d\rho}{dx} \frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} \right] \\ &= \frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\rho^2} \left( \frac{d\rho}{dx} \right)^2 + \frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} \frac{d^2\rho}{dx^2}, \end{aligned} \quad (32.11)$$



così che

$$\begin{aligned} W''(x_0) &= V''_{\text{eff}}(\rho_0) \left( \frac{d\rho}{dx} \Big|_{\rho=\rho_0} \right)^2 = V''_{\text{eff}}(\rho_0) \left( -\frac{L}{x_0^2 \sqrt{\mu}} \right)^2 \\ &= V''_{\text{eff}}(\rho_0) \left( -\frac{\sqrt{\mu} \rho_0^2}{L} \right)^2 = \frac{\mu \rho_0^4 V''_{\text{eff}}(\rho_0)}{L^2}, \end{aligned} \quad (32.12)$$

dove si è tenuto conto che  $V'_{\text{eff}}(\rho_0) = 0$ . Quindi possiamo riscrivere  $\omega$  in (32.5) come

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu \rho_0^4 V''_{\text{eff}}(\rho_0)}{L^2}}. \quad (32.13)$$

La (32.8) è l'equazione dell'oscillatore armonico (in cui  $\theta$  ha il ruolo del tempo) con periodo  $T_0 = 2\pi/\omega$ , con  $\omega$  dato dalla (32.13): quindi l'angolo  $\Theta_0$  è dato da  $\Theta_0 = T_0/2 = \pi/\omega$ , che, in virtù della definizione di  $\omega$  in (32.13), implica la prima uguaglianza

$$\Theta_0 = \pi \sqrt{\frac{L^2}{\mu \rho_0^4 V''_{\text{eff}}(\rho_0)}} \quad (32.14)$$

in (32.1).

Dalla definizione (30.28) di  $V_{\text{eff}}(\rho)$  si ha

$$V''_{\text{eff}}(\rho_0) = V''(\rho_0) + \frac{3L^2}{\mu \rho_0^4}, \quad (32.15)$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\mu \rho_0^4 V''_{\text{eff}}(\rho_0)}{L^2} &= \frac{\mu \rho_0^4}{L^2} \left( V''(\rho_0) + \frac{3L^2}{\mu \rho_0^4} \right) \\ &= \frac{\rho_0}{V'(\rho_0)} (V''(\rho_0) + 3V'(\rho_0)/\rho_0) = \frac{\rho_0 V''(\rho_0) + 3V'(\rho_0)}{V'(\rho_0)}, \end{aligned} \quad (32.16)$$

poiché  $\rho_0$  è tale che

$$V'_{\text{eff}}(\rho_0) = V'(\rho_0) - \frac{L^2}{\mu \rho_0^3} = 0, \quad (32.17)$$

essendo  $\rho_0$  un minimo per  $V_{\text{eff}}(\rho)$ . La seconda uguaglianza

$$\Theta_0 = \pi \sqrt{\frac{V'(\rho_0)}{\rho_0 V''(\rho_0) + 3V'(\rho_0)}}, \quad (32.18)$$

in (32.1) segue allora dalla prima (32.14) e dalla (32.16). ■

**32.8. Osservazione.** Il vantaggio della scrittura (32.18), rispetto alla (32.14), è che la dipendenza dai dati iniziali è espressa attraverso la sola variabile  $\rho_0$ . Questo sarà usato nella discussione seguente.

**32.9. LEMMA.** *Condizione necessaria perché in un campo centrale la quantità  $\Theta_0$  definita in (32.1) abbia lo stesso valore per tutte le orbite circolari corrispondenti ai*

minimi  $\rho_0$  del potenziale efficace  $V_{\text{eff}}(\rho)$  che si ottengono al variare dei dati iniziali, e quindi di  $L$ , è che l'energia potenziale  $V(\rho)$ , a meno di un'irrelevante costante additiva, sia di una delle due seguenti forme:

$$V(\rho) = \begin{cases} a\rho^\alpha, & \alpha \geq -2, \alpha \neq 0, \\ b \log \rho, & \end{cases} \quad (32.19)$$

dove  $a, b$  sono costanti. L'angolo  $\Theta_0$  è allora dato da

$$\Theta_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha + 2}}, \quad (32.20)$$

dove  $\alpha = 0$  corrisponde al potenziale logaritmico in (32.19).

**32.10.** *Dimostrazione del lemma 32.9.* Assumendo la (32.19), la (32.20) segue dalla (32.1). È quindi sufficiente dimostrare la (32.19).

Fissata la funzione  $V(\rho)$ , il minimo  $\rho_0$  è funzione del momento angolare, *i.e.* di  $L$  (cfr. la (30.28)), e dipende da  $L$  in maniera continua. L'angolo  $\Theta_0$  dipende con continuità da  $\rho_0$ , e quindi da  $L$ ; perché  $\Theta_0$  sia costante occorre quindi che  $\Theta_0$  sia costante in  $L$ , ovvero che la seconda espressione in (32.1) di  $\Theta_0$  non dipenda da  $\rho_0$  (poiché la dipendenza da  $L$  in tale espressione è attraverso  $\rho_0$ ). In altre parole deve esistere una costante  $C \geq 0$  tale che

$$\frac{V'(\rho)}{\rho V''(\rho) + 3V'(\rho)} = C, \quad (32.21)$$

per ogni valore di  $\rho$  (poiché al variare di  $L$  varia il valore  $\rho_0$  del minimo di  $V_{\text{eff}}(\rho)$ ). La (32.21) è un'equazione differenziale, che, ponendo  $U = V'$ , si può scrivere come

$$U'(\rho) = \frac{1 - 3C}{C\rho} U(\rho) \quad (32.22)$$

e si può risolvere per separazione di variabili. Si ottiene quindi, per qualche costante  $A$ ,

$$U(\rho) = A\rho^\alpha, \quad \alpha = \frac{1 - 3C}{C}, \quad (32.23)$$

che, integrata, dà, a meno di un'irrelevante costante di integrazione, appunto la (32.19), tenuto conto che si ha  $(1 - 3C)/C \geq -3$  dal momento che  $C \geq 0$  (in particolare se  $C = 1/2$  si ha  $U(\rho) = A/\rho$ , che corrisponde al caso logaritmico). ■

**32.11.** *COROLLARIO. Condizione necessaria perché il moto in un campo centrale sia periodico ogni qual volta avvenga in una regione limitata è che l'energia potenziale  $V(\rho)$  sia di una delle due forme (32.19).*

**32.12.** *Dimostrazione del corollario 32.11.* Perché il moto  $t \rightarrow \mathbf{r}(t)$  sia periodico occorre che  $\Theta$  sia commensurabile con  $2\pi$ , *i.e.*  $\Theta/2\pi \in \mathbb{Q}$  (cfr. il lemma 30.21 e le

notazioni introdotte in §32.2). Poiché  $\Theta$  dipende con continuità dai dati iniziali, se non è costante in  $L$ , al variare di  $L$  non sarà commensurabile con  $2\pi$  che su un insieme di misura nulla (per il lemma 30.23). Quindi occorre che  $\Theta$  sia costante al variare dei dati iniziali.

Se in particolare scegliamo dati iniziali tali che  $\bar{\rho} = \rho_0 + O(\varepsilon)$  e l'energia sia  $E = E(\varepsilon) = V_{\text{eff}}(\rho_0) + \varepsilon^2$ , indichiamo con  $\Theta_\varepsilon$  il corrispondente incremento di  $\theta$  in un semiperiodo del moto radiale  $\rho(t)$ . Definiamo  $\Theta_0$  come nel lemma 32.6.

Supponiamo per assurdo che  $V(\rho)$  non sia di una delle due forme (32.19). Allora  $\Theta_0$  non può essere costante in  $L$ . Ne segue che, per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo,  $\Theta_\varepsilon$  non può essere costante in  $L$  (per continuità), quindi  $\Theta_\varepsilon$  non può essere commensurabile con  $2\pi$  indipendentemente dai dati iniziali.

In conclusione solo se  $V(\rho)$  è di una delle due forme (32.19), il moto può essere periodico indipendentemente dai dati iniziali (purché, ovviamente, la corrispondente orbita sia limitata).

**32.13. LEMMA.** *Sia  $V(\rho)$  tale che  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\rho) = \infty$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 V(\rho) = 0$ . Allora*

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \Theta = \frac{\pi}{2}, \quad (32.24)$$

*indipendentemente dalla funzione  $V(\rho)$ .*

**32.14. Dimostrazione del lemma 32.13.** Chiamiamo al solito  $\rho_1$  e  $\rho_2$  le radici dell'equazione  $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$ ; in base alle ipotesi fatte sul potenziale si ha che, per  $E \rightarrow \infty$ ,  $\rho_1 \rightarrow 0$  e  $\rho_2 \rightarrow \infty$ . Operando il cambiamento di variabili  $y = \rho_1/\rho$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \frac{1}{\rho^2 \sqrt{2\mu L^{-2}(E - V_{\text{eff}}(\rho))}} \\ &= \int_{y_1}^1 dy \frac{1}{\sqrt{2[\mu\rho_1^2 L^{-2}E - W(y)]}} \\ &= \int_{y_1}^1 dy \frac{1}{\sqrt{2[W(1) - W(y)]}}, \end{aligned} \quad (32.25)$$

dove  $y_1 = \rho_1/\rho_2$  e

$$W(y) = \frac{\mu\rho_1^2}{L^2} V_{\text{eff}}(\rho_1/y) = \frac{y^2}{2} + \frac{\mu\rho_1^2}{L^2} V(\rho_1/y), \quad (32.26)$$

così che  $W(1) = \mu\rho_1^2 L^{-2} E$  (poiché  $V_{\text{eff}}(\rho_1) = E$ ).

Si ha inoltre  $\lim_{E \rightarrow \infty} y_1 = 0$ ,  $\lim_{E \rightarrow \infty} y_2 = 1$  e  $\lim_{E \rightarrow \infty} W(y) = y^2/2$  (quindi  $\lim_{E \rightarrow \infty} W(1) = 1/2$ ), sempre sotto le ipotesi fatte per la funzione  $V(\rho)$  (in particolare per l'andamento assunto per  $\rho \rightarrow 0$ ).

Si ha quindi

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \Theta = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad (32.27)$$

così che la (32.24) è dimostrata. ■

**32.15.** LEMMA. Sia  $V(\rho) = -k\rho^{-\beta}$ , con  $k > 0$  e con  $0 < \beta < 2$ . Si ha allora

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \Theta = \frac{\pi}{2 - \beta}. \quad (32.28)$$

**32.16.** Dimostrazione del lemma 32.15. L'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{k}{\rho^\beta} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad (32.29)$$

corrispondente all'energia potenziale  $V(\rho)$  ha un unico minimo

$$\rho_0 = \left( \frac{L^2}{\beta k \mu} \right)^{1/(2-\beta)} \quad (32.30)$$

e tende a 0 per  $\rho \rightarrow \infty$ . Quindi, per  $E \rightarrow 0^-$ , si ha  $\rho_1 \rightarrow [L^2(2\mu k)^{-1}]^{1/(2-\beta)}$  e  $\rho_2 \rightarrow \infty$ .

Si ha, per  $E = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{L^2} (E - V_{\text{eff}}(\rho)) &= -\frac{2\mu}{L^2} V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{2\mu k}{L^2} \frac{1}{\rho^\beta} - \frac{1}{\rho^2} \\ &= \frac{1}{\rho_1^2} \left[ \frac{2\mu k \rho_1^{2-\beta}}{L^2} \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^\beta - \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\rho_1^2} \left[ \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^\beta - \left( \frac{\rho_1}{\rho} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho_1^2} (y^\beta - y^2) \end{aligned} \quad (32.31)$$

così che, operando il cambiamento di variabili  $y = \rho_1/\rho$ , si ottiene

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \Theta = \lim_{E \rightarrow 0^-} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\mu L^{-2} (E - V_{\text{eff}})}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^\beta - y^2}}. \quad (32.32)$$

Sostituendo  $z = y^{1-\beta/2}$  si ha quindi

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \Theta = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^\beta - y^2}} = \frac{2}{2 - \beta} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\pi}{2 - \beta}, \quad (32.33)$$

così che la (32.28) è dimostrata. ■

**32.17.** LEMMA. Sia  $V(\rho) = k\rho^2$ , con  $k > 0$ : allora tutte le orbite sono delle ellissi, quindi sono chiuse e limitate.

**32.18.** Dimostrazione del lemma 32.17. Segue dal lemma 31.2. ■

**32.19.** LEMMA. Sia  $V(\rho) = -k/r$ , con  $k > 0$ : allora tutte le orbite limitate sono delle ellissi, quindi sono chiuse.

**32.20.** Dimostrazione del lemma 32.19. Segue dal lemma 31.7. ■

**32.21.** TEOREMA (BERTRAND). In un campo centrale tutte le orbite limitate sono

chiuse se e solo se l'energia potenziale assume una delle due seguenti forme:

$$V(\rho) = \begin{cases} k\rho^2, & \text{(energia potenziale armonica) ,} \\ -k/\rho, & \text{(energia potenziale coulombiana) ,} \end{cases} \quad (32.34)$$

con  $k > 0$ .

**32.22.** *Dimostrazione del teorema 32.21.* Per prima cosa notiamo che si può ragionare come in §32.12, nella dimostrazione del corollario 32.11, per concludere che  $\Theta$  deve rimanere costante al variare dei dati iniziali.

Abbiamo già visto che na condizione necessaria perché le orbite limitate siano chiuse (*i.e.* percorse da traiettorie periodiche) è data dal corollario 32.11, che richiede che l'energia potenziale  $V(\rho)$  sia data da una delle funzioni in (32.19). Corrispondentemente  $\Theta_0$  è dato dalla (32.20), *i.e.*  $\Theta_0 = \pi/\sqrt{\alpha+2}$ .

Se  $\alpha > 0$  in (32.19) allora  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\rho) = \infty$  e  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 V(\rho) = 0$ , quindi per il lemma 32.13 deve risultare  $\Theta_0 = \pi/2$ , che è compatibile con la (32.20) purché sia  $\alpha = 2$ .

Se  $\alpha < 0$ , allora, per il lemma 32.15, con  $\beta = -\alpha$ , deve risultare  $\Theta_0 = \pi/(2 + \alpha)$  che è compatibile con la (32.20) purché sia  $\alpha = -1$ .

Infine, se  $\alpha = 0$ , *i.e.* se  $V(\rho) = b \log \rho$ , si ha, per la (32.20) del lemma 32.9,  $\Theta_0 = \pi/\sqrt{2}$ , che è tuttavia incommensurabile con  $2\pi$ .

Si verifica facilmente che per  $V(\rho)$  data dalla (32.1), se  $a < 0$  per  $\alpha > 0$  e se  $a > 0$  per  $\alpha < 0$ , le orbite sono tutte illimitate: in tali casi risulta infatti  $V'_{\text{eff}}(\rho) < 0$ , quindi le funzioni  $V_{\text{eff}}(\rho)$  sono decrescenti.

In conclusione può dunque accadere che le orbite limitate siano tutte chiuse solamente per i potenziali  $V(\rho) = k\rho^2$  e  $V(\rho) = -k/\rho$ , con  $k > 0$ . Questo di fatto accade, come segue dal lemma 32.17 e dal lemma 32.19. ■

## Nota bibliografica

Per gli argomenti trattati nel presente Capitolo abbiamo seguito soprattutto [Arnol'd 2], Cap. II, e [Dell'Antonio], Capp. I e II. Per alcuni aspetti abbiamo tenuto presente anche [Gallavotti], Cap. 4, e [Fasano-Marmi], Cap. 5.

Per una discussione delle proprietà delle coniche utilizzate si veda *e.g.* [Martinel- li], Cap. 6. Per alcuni semplici risultati di analisi brevemente richiamati si veda *e.g.* [Giusti1] e [Giusti2].

Per le teoria della misura e di Lebesgue (e dell'integrazione secondo Lebesgue) si può vedere *e.g.* [Giusti2], Cap. 5.

Per una trattazione introduttiva della dinamica si può consultare qualsiasi testo di Fisica. Per un punto di vista più matematico si possono consultare anche [Levi-Civita-Amaldi], [Dell'Antonio] e [Gallavotti].

Per una discussione più approfondita della rilevanza dei campi centrali in problemi di interesse fisico si veda ancora [Gallavotti] e [Goldstein].

Per il teorema di Noether cfr. *e.g.* [Arnol'd2], Cap. IV, o [Dell'Antonio], Cap. VII.

Per una discussione di cosa si intende per proprietà generica nello studio di sistemi dinamici si può consultare *e.g.* [Katok-Hasselblatt], Cap. 7.

Gli esercizi 14, 15 e 16 seguono [Goldstein], Cap. 3.

## Esercizi

**Esercizio 1.** Data una funzione  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A \subset \mathbb{R}^n$ , un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  e una direzione (*i.e.* un vettore unitario)  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , si chiama *derivata direzionale* di  $f$  nel punto  $\mathbf{x}_0$  e nella direzione  $\mathbf{v}$  il limite (se esiste)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{\varepsilon}.$$

Dimostrare che se  $f$  è differenziabile allora il limite sopra esiste e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0),$$

dove  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  nella base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  e  $\partial/\partial x_i$  indica la derivata parziale rispetto a  $x_i$  (*i.e.* la derivata direzionale nella direzione  $\mathbf{e}_i$ ).

**Esercizio 2.** Dimostrare che l'operatore gradiente, in coordinate polari ( $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , con  $\rho \in \mathbb{R}_+$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ ), è dato da

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left( \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

dove  $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . [*Suggerimento.* Si ha  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan(y/x)$ . In coordinate polari la base  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta\}$  è data da  $\mathbf{e}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$ : si usi quindi l'esercizio 1.]

**Esercizio 3.** Dimostrare che l'operatore gradiente, in coordinate sferiche ( $x = \rho \cos \theta \sin \varphi$ ,  $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = \rho \cos \varphi$ , con  $\rho \in \mathbb{R}_+$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  e  $\varphi \in [-0, \pi)$ ), è dato dalla (30.12). [*Suggerimento.* Si ha  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\theta = \arctan(y/x)$  e  $\varphi = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z)$ . In coordinate sferiche la base  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  è data da  $\mathbf{e}_\rho = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$ ,  $\mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, -\sin \varphi)$ : si usi quindi l'esercizio 1.]

**Esercizio 4.** Dimostrare che l'operatore gradiente, in coordinate cilindriche ( $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,  $z = z$ , con  $\rho \in \mathbb{R}_+$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ ), è dato da

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left( \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

[*Suggerimento.* Si ha  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan(y/x)$ , come nel caso delle coordinate polari. In coordinate cilindriche la base  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  è data da  $\mathbf{e}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ,  $\mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ ,  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ : si usi quindi l'esercizio 1.]

**Esercizio 5.** Dimostrare la (31.79). [*Soluzione.* Per  $h$  sufficientemente piccolo possiamo sempre assumere che la funzione  $\rho(t)$  sia monotona in  $[t, t+h]$ . Supponiamo  $\rho(t+h) > \rho(t)$ ; in caso contrario si invertono i ruoli delle due quantità nella discussione che segue. L'area del settore  $A(t+h)$

$h) - A(t)$  dell'ellisse è compresa tra le aree dei due settori circolari di apertura  $\theta(t+h) - \theta(t)$  e raggi, rispettivamente,  $\rho(t+h)$  e  $\rho(t)$ . Quindi

$$\frac{1}{2}\rho^2(t)(\theta(t+h) - \theta(t)) \leq A(t+h) - A(t) \leq \frac{1}{2}\rho^2(t+h)(\theta(t+h) - \theta(t)),$$

dove  $\theta(t+h) = \theta(t) + \dot{\theta}(t)h + O(h^2)$  e  $\rho(t+h) = \rho(t) + O(h)$ . Si ottiene allora

$$\frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}(t)h + O(h^2) \leq A(t+h) - A(t) \leq \frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}(t)h + O(h^2),$$

così che, passando al limite  $h \rightarrow 0$ , si trova la (31.79).]

**Esercizio 6.** Dimostrare che l'area dell'ellisse di semiassi di lunghezza  $a$  e  $b$  è data da  $\pi ab$ .

**Esercizio 7.** Si consideri un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2 + \frac{\alpha}{\rho^2},$$

con  $k > 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- (1) Scrivere l'equazione del moto.
- (2) Determinare le orbite esprimendo la variabile radiale in termini della variabile angolare.
- (3) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto del sistema complessivo è periodico. [Suggerimento. Per il punto (2) si può ragionare come nel caso dell'energia potenziale armonica in §31, notando che il termine addizionale dovuto alla forza centrifuga in (30.28) è proporzionale a  $1/\rho^2$ . Quello che cambia rispetto al caso armonico è che ora non tutte le orbite saranno chiuse.]

**Esercizio 8.** Si consideri un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^2},$$

con  $k > 0$  e  $\alpha > 0$ .

- (1) Scrivere l'equazione del moto.
- (2) Determinare le orbite esprimendo la variabile radiale in termini della variabile angolare.
- (3) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto del sistema complessivo è periodico [Suggerimento. Per il punto (2) si può ragionare come nel caso dell'energia potenziale coulombiana in §31, notando che il termine addizionale dovuto alla forza centrifuga in (30.28) è proporzionale a  $1/\rho^2$ . Quello che cambia rispetto al caso coulombiano è che ora non tutte le orbite limitate saranno chiuse.]

**Esercizio 9.** Si considerino due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di massa  $m_1 = m_2 = 2$  che interagiscono attraverso una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \rho - \frac{1}{4}\rho^4,$$

dove  $\rho = |\mathbf{r}|$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti.

- (1) Descrivere il moto mettendosi nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema a due gradi di libertà (descrivibile attraverso le due variabili polari  $(\rho, \theta)$ ).
- (2) Discutere il moto della variabile  $\rho(t)$  e analizzare qualitativamente le orbite nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$  al variare del momento angolare  $L$  del sistema.
- (3) Determinare i punti d'equilibrio (discutendone la stabilità) e le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (4) Scrivere la legge di variazione di  $\theta(t)$  in funzione di  $\rho(t)$ .
- (5) Individuare un moto periodico per il sistema complessivo e trovarne il periodo.

282 CAPITOLO 7. MOTI CENTRALI E PROBLEMA DEI DUE CORPI

(6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto del sistema complessivo è periodico (sempre nel sistema del centro di massa).

**Esercizio 10.** Si consideri un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\rho^3},$$

con  $\alpha, \gamma > 0$ . Si discuta il moto della variabile  $\rho(t)$ , rispondendo alle domande seguenti al variare dei parametri  $\alpha, \gamma, L$  se  $L$  è il modulo del momento angolare del sistema.

- (1) Scrivere l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
- (2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3) Disegnare il grafico del potenziale efficace.
- (4) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.
- (7) Discutere un caso in cui i parametri e i dati iniziali siano fissati in modo da avere un moto di caduta verso il centro (*i.e.* un moto asintotico all'origine) e verificare se il tempo di caduta è finito o infinito.

**Esercizio 11.** Si consideri un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{2\rho^4} + \frac{1}{6\rho^6} + \frac{\alpha}{2\rho^2},$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si discuta il moto della variabile  $\rho(t)$ , rispondendo alle domande seguenti al variare del parametro  $\alpha$  e del modulo  $L$  del momento angolare del sistema.

- (1) Scrivere l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
- (2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3) Disegnare il grafico del potenziale efficace.
- (4) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

**Esercizio 12.** Si consideri un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2},$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si discuta il moto della variabile  $\rho(t)$ , rispondendo alle domande seguenti al variare del parametro  $\alpha$  e del modulo  $L$  del momento angolare del sistema.

- (1) Scrivere l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
- (2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3) Disegnare il grafico del potenziale efficace.
- (4) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (6) Discutere le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

**Esercizio 13.** Si dimostri l'identità

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{z},$$

valida per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 14.** Si dimostri che nel caso di moti centrali descritti dall'equazione (30.14) si ha

$$[\ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{L}] = -F(\rho) (\dot{\rho} \mathbf{r} - \rho \dot{\mathbf{r}}).$$



[*Suggerimento.* Si usi l'esercizio 13 e il fatto che  $2\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = (d/dt)\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = (d/dt)\rho^2 = 2\rho\dot{\rho}$ .]

**Esercizio 15.** Dimostrare che per il campo centrale coulombiano il *vettore di Laplace-Runge-Lenz* (o *vettore di Runge-Lenz*), definito come

$$\mathbf{A} = [\mu\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{L}] - \mu k \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

è una costante del moto. [*Suggerimento.* Si usi la conservazione del momento angolare, l'esercizio 14 e il fatto che, per il campo centrale coulombiano, si ha  $F(\rho) = -k/\rho^2$ .]

**Esercizio 16.** Utilizzare il risultato dell'esercizio 15 per dimostrare che le orbite, nel caso del campo centrale coulombiano, hanno la forma (31.57). [*Suggerimento.* Si ha  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{L} \rangle = 0$ , quindi  $\mathbf{A}$  è un vettore costante nel piano in cui si svolge il moto. Prendendo l'asse  $x$  diretto lungo il vettore  $\mathbf{A}$  e ponendo  $A = |\mathbf{A}|$ , si trova  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{r} \rangle = A\rho \cos \theta = L^2 - \mu k\rho$ , dove si è usata due volte di seguito l'identità  $\langle \mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}] \rangle = \langle \mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}] \rangle$  e la definizione di momento angolare.]

