

---

## Capitolo 8. Moti relativi e sistemi di riferimento

### 33. Moto in un sistema mobile di coordinate

**33.1. Introduzione.** Abbiamo già visto nei capitoli precedenti che spesso può essere utile cambiare sistema di riferimento quando si cercano le traiettorie di un sistema dinamico: può infatti succedere che in qualche particolare sistema di riferimento le equazioni del moto assumano una forma più semplice e sia quindi più facile trovarne la soluzione. Una volta fatto questo, occorre, ovviamente, essere in grado di ritornare nel sistema di riferimento di partenza.

Nel presente capitolo ci proponiamo di approfondire ulteriormente il problema del cambiamento di sistema di riferimento. Più precisamente considereremo il caso in cui un sistema di riferimento sia fisso e uno mobile: il primo costituisce quello che comunemente prende il nome di sistema di riferimento di laboratorio, poiché lo si può immaginare come il sistema di riferimento (fisso) in cui si effettuano esperimenti su qualche sistema in moto. Ci si può porre però anche il problema di effettuare delle misure in un esperimento da un sistema di riferimento mobile (in cui la descrizione del moto appaia più semplice): occorre quindi fissare la legge per esprimere le coordinate del sistema di riferimento mobile rispetto a quello fisso. Vedremo che questo sarà particolarmente utile nel caso in cui si studiano sistemi rigidi (cfr. i capitoli successivi): in tale caso si sceglierà come sistema di riferimento mobile un sistema di riferimento solidale con il sistema rigido, *i.e.* tale che in esso il sistema rigido si possa considerare fermo.

Non solo: a volte si effettuano esperimenti in un sistema di riferimento mobile e, a partire dalle leggi fondamentali della fisica, occorre conoscere esattamente in che modo tali leggi vengano modificate dal fatto di trovarsi in un sistema in movimento. Se si tiene conto che la Terra (e quindi qualsiasi laboratorio in essa) non costituisce un sistema di riferimento fisso, si può apprezzare subito l'importanza di tali risultati.

**33.2. Notazioni.** Ricordiamo che abbiamo indicato con  $M(n)$  l'insieme delle matrici  $n \times n$ . Indichiamo con  $M(n, \mathbb{R})$  lo spazio delle matrici  $n \times n$  con elementi reali. Il sottospazio  $GL(n, \mathbb{R})$  delle matrici  $A \in M(n, \mathbb{R})$  tali che  $\det A \neq 0$  ha struttura di gruppo, come è immediato verificare (cfr. l'esercizio 1), e prende il nome di *gruppo lineare*;  $SL(n, \mathbb{R})$  è il sottospazio (sottogruppo) di  $GL(n, \mathbb{R})$  delle matrici  $A$  che hanno determinante  $\det A = 1$ , e prende il nome di *gruppo lineare speciale*.

Il gruppo delle *matrici ortogonali*, i.e. delle matrici  $A$  tali che  $A^T = A^{-1}$  (dove  $A^T$  indica la trasposta e  $A^{-1}$  l'inversa di  $A$ ), si indica con  $O(n)$  e prende il nome di *gruppo ortogonale* (se le matrici sono a elementi complessi e  $A^\dagger$  indica la matrice aggiunta di  $A$ , la condizione  $A^\dagger = A^{-1}$  definisce il gruppo delle matrici unitarie, indicato con  $U(n)$ ). Se  $A \in O(n)$ , è immediato verificare che  $|\det A| = 1$ . Il *gruppo ortogonale speciale*  $SO(n)$  è il sottogruppo di  $O(n)$  costituito dalle matrici ortogonali  $A$  con  $\det A = 1$ .

**33.3. LEMMA.** *Il gruppo  $SO(n)$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n^2}$ , di dimensione  $n(n-1)/2$ .*

**33.4. Dimostrazione del lemma 33.3.** La relazione matriciale  $A^T A = \mathbf{1}$  equivale alle  $n^2$  equazioni

$$\sum_{k=1}^n (A^T)_{ik} A_{kj} = (A^T)_{i1} A_{1j} + \dots + (A^T)_{in} A_{nj} = \delta_{ij}, \quad (33.1)$$

dove  $\delta_{ij}$  è la delta di Kronecker, che possiamo scrivere come

$$A_{1i} A_{1j} + \dots + A_{ni} A_{nj} = \delta_{ij}; \quad (33.2)$$

si hanno quindi  $(n^2 + n)/2$  equazioni indipendenti ( $n$  per  $i = j$  e  $(n^2 - n)/2$  per  $i < j$ ). Quindi la dimensione di  $SO(n)$  è data da

$$\dim(SO(n)) = \dim(\mathbb{R}^{n^2}) - \frac{n^2 + n}{2} = n^2 - \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (33.3)$$

**33.5.** Consideriamo in  $\mathbb{R}^3$  due *sistemi di coordinate* (o *sistemi di riferimento*)  $\kappa$  e  $K$ , di cui il primo è fisso e il secondo è mobile; indicheremo con  $O$  e  $O'$  le rispettive origini. Se  $\kappa$  è un sistema di coordinate  $(x, y, z)$  ottenuto fissando in  $\mathbb{R}^3$  una base  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  (cfr. §1.26) scriveremo  $\kappa = Oxyz$ ; analogamente se  $K$  è individuato dal sistema di coordinate  $(\xi, \eta, \zeta)$  nella base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  scriveremo  $K = O'\xi\eta\zeta$ . Chiameremo *moto rigido* (o semplicemente *moto*) di  $K$  rispetto a  $\kappa$  un'applicazione che dipende in modo regolare da  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$D_t: K \rightarrow \kappa, \quad (33.4)$$

tale che conservi la metrica e l'orientazione (a  $t$  fissato l'applicazione  $D_t$  costituisce una *trasformazione rigida*). Cfr. la figura 33.1.

Il moto si chiamerà *rotazione* se l'origine delle coordinate di  $K$  coincide con l'origine delle coordinate di  $\kappa$ , si chiamerà *traslazione* se le coordinate di tutti i punti di  $K$  differiscono per uno stesso vettore  $\mathbf{r}(t)$  rispetto a quelle dei punti di  $\kappa$ .

Nel seguito indicheremo con  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{Q}$  i punti, rispettivamente, nei sistemi  $\kappa$  e  $K$ . Più precisamente indicheremo con  $\mathbf{q}(t)$  e  $\mathbf{Q}(t)$  il raggio vettore di uno stesso punto

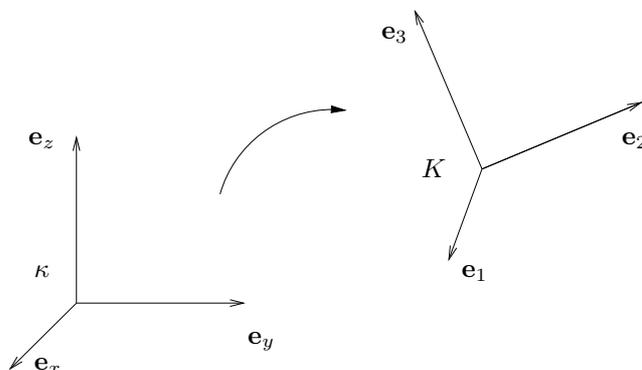


FIGURA 33.1. Esempio di trasformazione rigida  $D_t$  che fa passare dal sistema di riferimento fisso  $\kappa$  al sistema di riferimento mobile  $K$ .

mobile rispetto ai sistemi di riferimento  $\kappa$  e  $K$ , *i.e.*  $\mathbf{q}(t) = D_t \mathbf{Q}(t)$ ; a volte scriveremo semplicemente  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}$  e  $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}$ , senza indicarne esplicitamente la dipendenza dal tempo, quando questa risulti ovvia dal contesto. Infine indicheremo con  $\mathbf{O}$  e  $\mathbf{O}'$ , rispettivamente, le origini del sistema fisso e del sistema mobile, viste come vettori.

Analogamente a volte scriveremo semplicemente  $D_t = D$ , sottointendendo la dipendenza dal tempo.

Dati due vettori  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{R}^3$  indicheremo con  $\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle$  e con  $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]$ , rispettivamente, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale tra i due vettori: fissata la base ortonormale  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  (e quindi un sistema di coordinate) si avrà dunque  $\mathbf{q}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\mathbf{q}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , così che (cfr. anche il sottoparagrafo §30.2)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle &\equiv |\mathbf{q}_1|^2, \\ [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] &= (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2). \end{aligned} \tag{33.5}$$

Ricordiamo che, formalmente, il prodotto vettoriale dei due vettori  $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]$  si può scrivere nella forma di determinante come

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}, \tag{33.6}$$

che dà appunto la seconda relazione in (33.5). Ricordiamo anche che il prodotto vettoriale  $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]$  di due vettori  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$  è un vettore ortogonale al piano individuato da essi e diretto in modo tale da vedere  $\mathbf{q}_1$  sovrapporsi a  $\mathbf{q}_2$  ruotando in senso antiorario; cfr. la figura 33.2.

**33.6. Osservazione.** Ogni trasformazione rigida  $D_t$  si esprime in modo univoco come composizione di una rotazione  $B_t : K \rightarrow \kappa$  con una traslazione  $C_t : \kappa \rightarrow \kappa$ ,

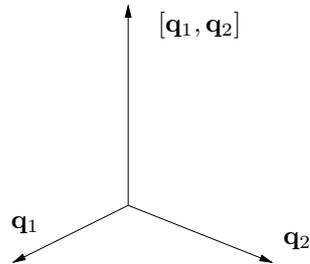


FIGURA 33.2. Prodotto vettoriale di due vettori.

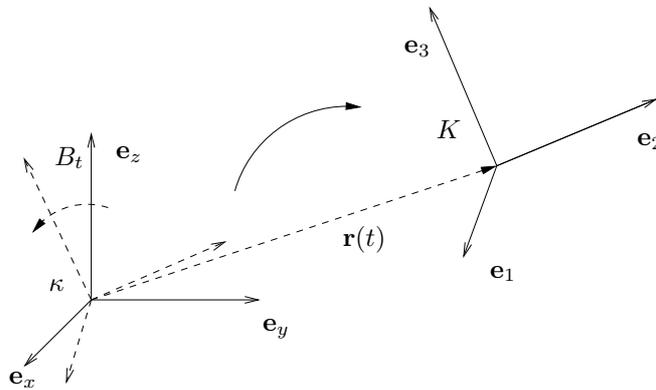


FIGURA 33.3. La trasformazione rigida  $D = D_t$  della figura 33.1 vista come composizione di una rotazione  $B_t$  con una traslazione  $C_t$ .

*i.e.*  $D_t = C_t B_t$ . Infatti, se definiamo  $\mathbf{r}(t) = D_t \mathbf{O}$ , se  $\mathbf{O}$  è l'origine di  $K$ , e poniamo  $C_t \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{r}(t)$  (così che  $C_t$  sia una traslazione), si ha allora che  $B_t \equiv C_t^{-1} D_t$  è una rotazione poiché  $B_t \mathbf{O} = \mathbf{O}$ . Cfr. la figura 33.3.

**33.7. LEMMA.** *La rotazione  $B_t$  è un operatore lineare ortogonale, i.e., fissata una qualsiasi base in  $\mathbb{R}^3$ , essa è rappresentata da una matrice ortogonale.*

**33.8. Dimostrazione del lemma (33.7).** Poiché  $B_t$  conserva le distanze e lascia fissa l'origine trasforma i triangoli in triangoli i quali, dovendo rimanere le lunghezze dei lati inalterate, conservano anche gli angoli. Poiché ogni combinazione lineare di vettori si può interpretare geometricamente in termini di triangoli (a partire dalla proprietà che la somma di due vettori è data dal segmento orientato che costituisce il terzo lato di un triangolo di cui i vettori dati costituiscono gli altri due lati), segue allora che  $B_t$  non altera i coefficienti della trasformazione lineare e quindi è lineare.

Fissato un sistema di coordinate, si può quindi rappresentare  $B_t$  tramite una ma-

trice. Poiché  $B_t$  conserva le distanze deve risultare

$$\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \rangle = \langle B_t \mathbf{Q}, B_t \mathbf{Q} \rangle = \langle \mathbf{Q}, B_t^T B_t \mathbf{Q} \rangle, \quad (33.7)$$

e quindi la matrice rappresentativa di  $B_t$  è una matrice ortogonale (che continueremo a indicare con lo stesso simbolo dell'operatore). ■

**33.9. Osservazione.** Se  $D_t = C_t$  (ovvero  $B_t \equiv \mathbb{1}$ ), diremo che il moto è (puramente) traslatorio; cfr. la figura 33.4.

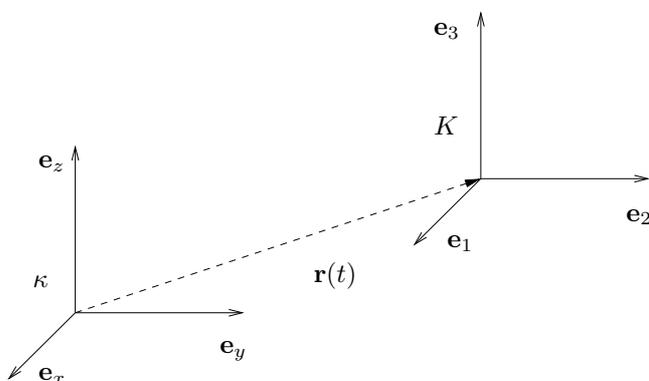


FIGURA 33.4. Esempio di moto puramente traslatorio.

Se  $C_t = \mathbb{1}$ , diremo che il moto è (puramente) rotatorio; cfr. la figura 33.5.

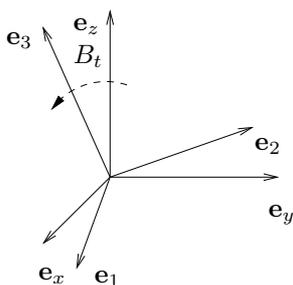


FIGURA 33.5. Esempio di moto puramente rotatorio.

**33.10.** Con le notazioni di §33.6, scriveremo, se  $D_t$  è il moto (33.4),

$$\mathbf{q}(t) = D_t \mathbf{Q}(t) = B_t \mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t), \quad (33.8)$$

o, semplicemente (cfr. la fine di §33.2),

$$\mathbf{q} = D\mathbf{Q} = B\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{r}. \quad (33.9)$$

Derivando la (33.8), troviamo

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\dot{\mathbf{Q}} + B\ddot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}}. \quad (33.10)$$

Per semplificare la trattazione considereremo preliminarmente moti puramente traslatori (§33.11 ÷ 33.12), quindi moti puramente rotatori (§33.13 ÷ 33.36). Infine combineremo i risultati corrispondenti ai due casi per arrivare al risultato generale che stabilisce la relazione che lega la velocità di un punto in un sistema fisso a quella in un sistema mobile (teorema 33.39).

**33.11. LEMMA.** *Se il sistema  $K$  si muove di moto puramente traslatorio rispetto al sistema  $\kappa$ , allora la velocità di un punto mobile rispetto al sistema fisso  $\kappa$  (velocità assoluta) è data da  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$ , con*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0, \quad (33.11)$$

dove  $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{Q}}$  è la velocità di un punto mobile rispetto al sistema mobile  $K$  (velocità relativa) e  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$  è la velocità del sistema  $K$  rispetto a  $\kappa$  (velocità traslatoria di trascinamento).

**33.12. Dimostrazione del lemma 33.11.** Se il moto è puramente traslatorio ( $B = \mathbb{1}$ ) la (33.10) diventa

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}}. \quad (33.12)$$

da cui segue la (33.10). ■

**33.13. LEMMA.** *L'operatore  $\dot{B}B^{-1}$  è un operatore lineare antisimmetrico, i.e., fissata una qualsiasi base in  $\mathbb{R}^3$ , esso è rappresentato da una matrice antisimmetrica.*

**33.14. Dimostrazione del lemma 33.13.** La linearità segue dal fatto che  $B$  è lineare (cfr. il lemma 33.7). Inoltre l'operatore  $B$  è ortogonale: quindi  $B^{-1} = B^T$ , se  $B^T$  indica l'operatore trasposto di  $B$ . Derivando rispetto al tempo l'identità  $BB^T = \mathbb{1}$ , otteniamo

$$\dot{B}B^T + B\dot{B}^T = 0, \quad (33.13)$$

quindi

$$\begin{aligned} \dot{B}B^{-1} + (\dot{B}B^{-1})^T &= \dot{B}B^T + (\dot{B}B^T)^T \\ &= \dot{B}B^T + (B^T)^T \dot{B}^T = \dot{B}B^T + B\dot{B}^T = 0, \end{aligned} \quad (33.14)$$

da cui segue che  $\dot{B}B^{-1}$  è antisimmetrico. ■

**33.15. LEMMA.** *Ogni operatore antisimmetrico  $A$  nello spazio euclideo tridimensionale orientato è un operatore di prodotto vettoriale, i.e. si ha*

$$A\mathbf{q} = [\mathbf{a}, \mathbf{q}], \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3, \quad (33.15)$$

dove  $\mathbf{a}$  è un vettore fissato dipendente unicamente da  $A$ .

**33.16.** *Dimostrazione del lemma 33.15.* Gli operatori lineari antisimmetrici in  $\mathbb{R}^3$  formano uno spazio lineare  $L_{\text{as}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di dimensione  $\dim(L_{\text{as}}) = 3$  (fissato un sistema di coordinate,  $A \in L_{\text{as}}$  si può rappresentare mediante una matrice antisimmetrica  $3 \times 3$ ); cfr. l'esercizio 2. L'operatore di prodotto vettoriale per un vettore fissato  $\mathbf{a}$  è lineare antisimmetrico e l'insieme di tutti gli operatori di prodotto vettoriale forma un sottospazio dello spazio lineare di tutti gli operatori antisimmetrici. Poiché la dimensione del sottospazio è uguale a 3 (in un sistema di coordinate, tante sono le coordinate del vettore  $\mathbf{a}$  che determina univocamente l'operatore di prodotto vettoriale), il sottospazio degli operatori di prodotto vettoriale deve coincidere con lo spazio degli operatori antisimmetrici. ■

**33.17.** *Osservazione.* Fissato un sistema di coordinate cartesiane, l'operatore  $A$  è definito da una matrice antisimmetrica (che continueremo a indicare con lo stesso simbolo dell'operatore),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (33.16)$$

In tal caso il vettore  $\mathbf{a}$  del lemma 33.15 avrà componenti

$$\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, a_3) = (-A_{23}, A_{13}, -A_{12}). \quad (33.17)$$

Infatti (33.17) è un autovettore di  $A$  con autovalore 0 e, dato un qualsiasi vettore  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  (le componenti sono nel sistema di coordinate scelto), si ha  $A\mathbf{q} = [\mathbf{a}, \mathbf{q}]$ , come è immediato verificare. A volte, dato l'operatore  $A$ , per evidenziare che, fissato un sistema di riferimento, c'è corrispondenza biunivoca tra la matrice (33.16) e il vettore (33.17) scriveremo  $A = A_{\mathbf{a}}$ .

**33.18.** LEMMA. *Il prodotto vettoriale conserva la metrica e l'orientazione, i.e.*

$$[B\mathbf{X}, B\mathbf{Y}] = B[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (33.18)$$

per ogni coppia di vettori  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ .

**33.19.** *Dimostrazione del lemma 33.18.* Poiché il prodotto scalare conserva la metrica (cfr. la (33.7)) e il prodotto vettoriale di due vettori  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  è ortogonale sia a  $\mathbf{X}$  sia a  $\mathbf{Y}$ , deve essere

$$\langle B\mathbf{X}, B[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle = \langle \mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle = 0, \quad \langle B\mathbf{Y}, B[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle = \langle \mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \rangle = 0, \quad (33.19)$$

così che  $B[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  è ortogonale al piano individuato dai due vettori  $B\mathbf{X}$  e  $B\mathbf{Y}$  e quindi  $B[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  deve essere parallelo a  $[B\mathbf{X}, B\mathbf{Y}]$ . Cfr. la figura 33.6.

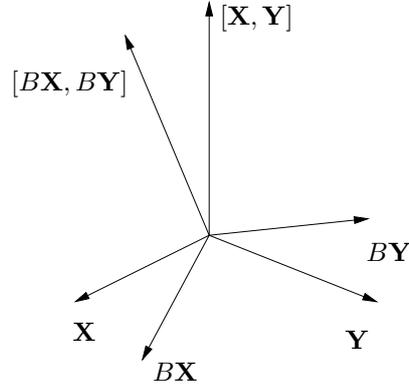


FIGURA 33.6. Discussione del lemma 33.18.

Inoltre risulta, sempre per la (33.7),

$$\begin{aligned} |[BX, BY]|^2 &= |BX|^2|BY|^2 - \langle BX, BY \rangle^2 \\ &= |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2 = |[X, Y]|, \end{aligned} \quad (33.20)$$

così che i due vettori  $[BX, BY]$  e  $[X, Y]$  devono avere lo stesso modulo: quindi anche  $[BX, BY]$  e  $B[X, Y]$  devono avere lo stesso modulo. Abbiamo quindi ottenuto

$$[BX, BY] = \pm B[X, Y]. \quad (33.21)$$

Per risolvere l'ambiguità di segno, introduciamo un operatore  $B(\alpha)$  che dipenda con continuità dal parametro  $\alpha \in [0, 1]$ , tale che  $B(0) = \mathbf{1}$  e  $B(1) = B$ . Per ogni  $\alpha \in [0, 1]$  possiamo ripetere il ragionamento precedente e concludere che deve valere la stessa relazione (33.21) con  $B = B(\alpha)$ . Poiché per  $\alpha = 0$  vale il segno  $+$  e la (33.21), con  $B(\alpha)$  in luogo di  $B$ , è continua in  $\alpha$ , concludiamo allora che vale il segno  $+$  per ogni  $\alpha$ , in particolare per  $\alpha = 1$ , ottenendo così la (33.18). ■

**33.20. COROLLARIO.** *Dato un operatore ortogonale  $B$  e dato un operatore antisimmetrico  $A$ , se  $\mathbf{a}$  è il vettore che è associato ad  $A$  attraverso la corrispondenza (33.15), i.e.  $A = A_{\mathbf{a}}$ , si ha allora*

$$B^{-1}A_{\mathbf{a}}B = A_{B^{-1}\mathbf{a}}, \quad (33.22)$$

*i.e. l'operatore  $B^{-1}A_{\mathbf{a}}B$  è un operatore antisimmetrico che si può scrivere come operatore di prodotto vettoriale nella forma (33.15), purché si sostituisca  $\mathbf{A} = B^{-1}\mathbf{a}$  ad  $\mathbf{a}$ .*

**33.21. Dimostrazione del corollario 33.20.** Poiché  $B$  è ortogonale e  $A_{\mathbf{a}}$  è antisimmetrico si ha

$$B^{-1}A_{\mathbf{a}}B + (B^{-1}A_{\mathbf{a}}B)^T = B^{-1}(A_{\mathbf{a}} + A_{\mathbf{a}}^T)B = 0, \quad (33.23)$$

*i.e.*  $B^{-1}A_aB$  è antisimmetrico: quindi, per il lemma 33.15, esiste un vettore  $\mathbf{b}$  tale che si abbia

$$B^{-1}A_aB\mathbf{x} = [\mathbf{b}, \mathbf{x}], \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (33.24)$$

Dobbiamo quindi dimostrare che  $\mathbf{b} = \mathbf{A} \equiv B^{-1}\mathbf{a}$ .

Per il lemma 33.18 (e per il lemma 33.15), si ha

$$B^{-1}A_aB\mathbf{Q} = B^{-1}A\mathbf{q} = B^{-1}[\mathbf{a}, \mathbf{q}] = [B^{-1}\mathbf{a}, B^{-1}\mathbf{q}] = [\mathbf{A}, \mathbf{Q}], \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^3, \quad (33.25)$$

avendo definito  $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{a} = B\mathbf{A}$ . Dal confronto tra le (33.24) e (33.25), data l'arbitrarietà di  $\mathbf{x}$  e di  $\mathbf{Q}$ , segue l'identità  $\mathbf{b} = B^{-1}\mathbf{a} \equiv \mathbf{A}$ . ■

**33.22. DEFINIZIONE (ROTAZIONE DI TRASCINAMENTO).** *Se il moto di  $K$  rispetto a  $\kappa$  è puramente rotatorio ( $\mathbf{r} \equiv \mathbf{0}$ ) e il punto  $\mathbf{Q}$  è in quiete nel sistema  $K$  ( $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ ), diremo che il moto è una rotazione di trascinamento.*

**33.23. Osservazione.** Se in particolare la rotazione è uniforme, avremo una rotazione  $B_t: K \rightarrow \kappa$  intorno a un asse fisso con velocità di rotazione uniforme. Il vettore che ha la direzione dell'asse fisso e modulo uguale alla velocità di rotazione dell'angolo prende il nome di *velocità angolare*  $\boldsymbol{\omega}$ ; cfr. la figura 33.7.

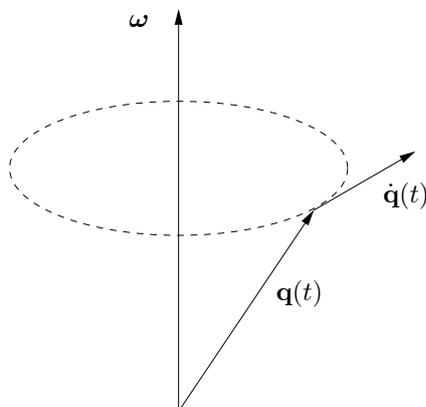


FIGURA 33.7. Esempio di rotazione uniforme. Il vettore  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  è in ogni istante  $t$  ortogonale al piano individuato dal vettore velocità angolare e da  $\mathbf{q}(t)$ .

Tenuto quindi conto delle direzioni del raggio vettore del punto mobile  $\mathbf{q}$  e della sua velocità, potremo scrivere

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}(t)]. \quad (33.26)$$

Più in generale, come vedremo tra poco (§33.24÷§33.36), il vettore velocità può variare nel tempo in direzione e modulo (cioè possono variare nel tempo la direzione dell'asse

di rotazione e la velocità di rotazione intorno a tale asse).

**33.24. TEOREMA.** *In ogni istante  $t \in \mathbb{R}$  si può trovare un vettore  $\boldsymbol{\omega}(t) \in \kappa$  tale che la velocità della rotazione di trascinamento si può esprimere mediante la formula*

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = [\boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{q}(t)], \quad \forall \mathbf{q}(t) \in \kappa. \quad (33.27)$$

**33.25. Dimostrazione del teorema 33.24.** Se  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$  e  $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ , si ha, dalla (33.10),

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q}, \quad (33.28)$$

così che, ricordando che  $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$ ,

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}B^{-1}\mathbf{q} \equiv A\mathbf{q}. \quad (33.29)$$

L'operatore lineare  $A: \kappa \rightarrow \kappa$  è antisimmetrico (cfr. il lemma 33.13) e la sua azione sui vettori  $\mathbf{q} \in \kappa$  si può esprimere come prodotto vettoriale (cfr. il lemma 33.15). Quindi

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}B^{-1}\mathbf{q} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}], \quad (33.30)$$

dove  $\boldsymbol{\omega}$  e  $A \equiv \dot{B}B^{-1}$  sono legati dalle relazioni

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33.31)$$

Seguendo l'osservazione 33.17, potremmo scrivere  $A = A_{\boldsymbol{\omega}}$ . ■

**33.26. DEFINIZIONE (VELOCITÀ ANGOLARE).** *L'operatore  $A = \dot{B}B^{-1}$  prende il nome di operatore velocità angolare. Poiché  $B \in \text{SO}(3)$ , si ha  $AB \in T_B\text{SO}(3)$ , i.e.  $AB$  appartiene allo spazio tangente in  $B$  a  $\text{SO}(3)$ . Il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  tale che  $A\mathbf{q} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}]$ , per ogni  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ , prende il nome di vettore velocità angolare (o velocità angolare tout court).*

**33.27. LEMMA.** *Siano  $\kappa$  e  $K$  due sistemi di riferimento, fisso il primo e mobile il secondo, e sia  $B: K \rightarrow \kappa$  la rotazione che porta i vettori  $\mathbf{Q} \in K$  nei vettori  $\mathbf{q} \in \kappa$ ,  $B\mathbf{Q} = \mathbf{q}$ . Se  $\{\boldsymbol{\xi}_j\}$  e  $\{\boldsymbol{\eta}_j\}$  sono due terne ortonormali (che inducono due sistemi di coordinate cartesiane), rispettivamente, in  $\kappa$  e  $K$ , e  $S$  è la matrice definita da*

$$\boldsymbol{\eta}_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij}\boldsymbol{\xi}_j, \quad (33.32)$$

risulta allora

$$S = B^T = B^{-1}. \quad (33.33)$$

*i.e. la matrice  $S$  è l'inversa (ovvero la trasposta) della matrice  $B$ .*

**33.28.** *Dimostrazione del lemma 33.27.* Siano  $\{Q_j\}$  le coordinate di un punto  $P$  nella terna  $\{\eta_j\}$  e  $\{q_j\}$  le coordinate dello stesso punto nella terna  $\{\xi_j\}$ ; quindi

$$\sum_{j=1}^3 Q_j \eta_j = \sum_{j=1}^3 q_j \xi_j. \quad (33.34)$$

Poiché  $B\mathbf{Q} = \mathbf{q}$ , si ha, tenendo conto anche della (33.32),

$$\sum_{p=1}^3 S_{ip} B_{pj} = \delta_{ij}, \quad (33.35)$$

dove  $\delta_{ij}$  è la delta di Kronecker. La (33.35) è equivalente alla (33.33). ■

**33.29.** *Osservazione.* La (33.33) afferma che la matrice  $B$  della trasformazione di coordinate di un punto sottoposto a una rotazione è la trasposta della matrice  $S$  che definisce la trasformazione degli assi coordinati.

**33.30.** *Osservazione.* Nello studio dei sistemi lineari abbiamo visto che se  $P$  è l'operatore lineare che fa passare da una base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  a una base  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ , *i.e.*  $\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} \mathbf{e}_j$ , se  $x$  e  $y$  sono le coordinate nelle basi  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$ , rispettivamente, e se l'operatore lineare  $Q$  è definito dalla relazione  $y = Qx$ , allora si ha  $P = (Q^T)^{-1}$ . Nel nostro caso, dove  $n = 3$ , si ha  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$  e quindi la (33.32) implica  $P = S$ . D'altra parte  $y = \mathbf{Q}$  e  $x = \mathbf{q}$ , quindi se  $B$  è definita in modo che sia  $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$  si deve allora avere  $Q = B^{-1}$ : quindi  $P^{-1} = Q^T$  corrisponde a  $S^{-1} = (B^{-1})^T = B$ , che è appunto la (33.33).

**33.31.** *TEOREMA.* *A ogni rotazione (che non sia l'identità) nello spazio euclideo tridimensionale orientato corrispondono in modo univoco un versore  $\xi$  e un angolo  $\theta$ , tali che la rotazione consiste in una rotazione di un angolo  $\theta$  intorno all'asse  $\xi$ .*

**33.32.** *Dimostrazione del teorema 33.31.* Basta dimostrare che, se  $B$  è la matrice associata alla rotazione, allora essa ammette 1 come autovalore semplice. Se  $\lambda$  è un autovalore di  $B$  e  $\xi$  l'autovettore corrispondente, si ha  $|B\xi| = |\lambda\xi| = |\xi|$ , poiché la matrice  $B$  è ortogonale: quindi  $|\lambda| = 1$ .

Poiché  $B$  è reale, i suoi autovalori sono reali o complessi coniugati. Indichiamo con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  gli autovalori di  $B$ . Si deve avere  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det B = 1$ , poiché  $B \in \text{SO}(3)$ . Se un autovalore, *e.g.*  $\lambda_1$ , non è reale, si deve avere  $\bar{\lambda}_2 = \lambda_1$  (o  $\bar{\lambda}_3 = \lambda_1$ ), e quindi  $1 = |\lambda_1|^2 \lambda_3$ , *i.e.*  $\lambda_3 = 1$  (o  $1 = |\lambda_1|^2 \lambda_2$ , *i.e.*  $\lambda_2 = 1$ ).

Se tutti gli autovalori sono reali, notiamo innanzitutto che  $B$  non può avere la forma canonica di Jordan, altrimenti non potrebbe essere ortogonale (se una matrice  $B'$  ha forma canonica di Jordan con autovalori  $\pm 1$ , esiste allora un vettore  $\xi'$  tale che, per ogni costante  $C > 0$ , esiste un intero  $N$  per il quale  $|(B')^N \xi'| > C|\xi'|$ ). Dunque

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  solo se  $B = \mathbf{1}$ , contro l'ipotesi che  $B$  non fosse l'identità. Quindi deve essere  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 = -1$  (o  $\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2 = -1$ ). ■

**33.33.** *Osservazione.* La discussione in §33.32 mostra che gli autovalori della matrice  $B \neq \mathbf{1}$  sono  $e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1$ , con  $0 < \theta \leq \pi$ . Questo vuol dire che, se  $B$  rappresenta la rotazione di un angolo  $\theta$  intorno all'asse  $\xi$ , si può trovare una base ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , tale che  $\mathbf{e}_3$  è parallelo a  $\xi$  e  $B$  ammette rappresentazione

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (33.36)$$

in quella base. Nella stessa base risulta anche

$$A \equiv \dot{B}B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (33.37)$$

ovvero  $\omega = (0, 0, \dot{\theta})$ .

**33.34.** TEOREMA. *Sia  $B_t$  una rotazione. Per ogni istante  $t_0$ , definiamo le "rotazioni relative"*

$$B_\delta(t_0) = B_{t_0+\delta}B_{t_0}^{-1}, \quad (33.38)$$

e indichiamo con  $\xi_\delta$  e  $\theta_\delta$  i corrispondenti assi e angoli di rotazione. Allora esistono i limiti

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1}\theta_\delta = \alpha(t_0), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\xi}_\delta = \hat{\xi}(t_0), \quad (33.39)$$

dove  $\hat{\xi}_\delta$  è il versore lungo la direzione  $\xi_\delta$ , e, se  $\alpha(t_0) \neq 0$ , il vettore  $\omega(t_0) = \alpha(t_0)\hat{\xi}(t_0)$  rappresenta la velocità angolare all'istante  $t_0$  nel sistema di riferimento  $\kappa$ .

**33.35.** *Dimostrazione del teorema 33.34.* Poiché la sfera unitaria è compatta, da ogni successione di versori  $\hat{\xi}_{\delta_n}$  si può trovare una sottosuccessione convergente; sia  $\hat{\xi} \equiv \hat{\xi}(t_0)$  il suo limite. Si ha

$$B_\delta(t_0) = \mathbf{1} + A\delta + O(\delta^2), \quad (33.40)$$

dove  $A = \dot{B}_{t_0}B_{t_0}^{-1}$  (che è la derivata di  $B_\delta(t_0)$  rispetto a  $\delta$  calcolata in  $\delta = 0$ ) è una matrice antisimmetrica (essendo  $B_\delta(t_0)$  ortogonale; cfr. il lemma 33.12). Per definizione di  $\hat{\xi}_\delta$ , si ha  $B_\delta(t_0)\hat{\xi}_\delta = \hat{\xi}_\delta$ . Quindi, applicando la (33.39) al versore  $\hat{\xi}_\delta$ , dividendo l'equazione risultante per  $\delta$  e passando al limite  $\delta \rightarrow 0$  (eventualmente per sottosuccessioni), si trova che  $A\hat{\xi} = 0$ .

Se  $A \neq 0$  (nel caso  $A = 0$  le affermazioni del Teorema 33.34 sono banalmente vere),  $\hat{\xi}$  è dunque un autovettore di  $A$  con autovalore  $\lambda = 0$ . Quindi, a meno dell'orientazione,  $\hat{\xi}$  non dipende dalla sottosuccessione scelta; l'ambiguità dell'orientazione è risolta

notando che  $\hat{\xi}_\delta$  è continua e quindi, per  $\delta$  vicino a 0, può assumere valori solo in un intorno di due punti antipodali della sfera.

In conclusione ogni sottosuccessione di  $\hat{\xi}_{\delta_n}$  converge allo stesso limite  $\hat{\xi}$ , quindi  $\hat{\xi}_\delta \rightarrow \hat{\xi}$ , i.e. esiste il limite  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\xi}_\delta = \hat{\xi} \equiv \hat{\xi}(t_0)$ . Possiamo quindi scrivere, per qualsiasi vettore  $\mathbf{q}$ ,  $A\mathbf{q} = [\boldsymbol{\omega}(t_0), \mathbf{q}]$ , per qualche vettore  $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ , e poiché  $0 = A\hat{\xi}(t_0) \equiv [\boldsymbol{\omega}(t_0), \hat{\xi}(t_0)]$ , segue che il vettore  $\boldsymbol{\omega}(t_0)$  così definito è parallelo a  $\hat{\xi}(t_0)$ . Resta quindi da verificare, per concludere la dimostrazione del teorema, che  $|\boldsymbol{\omega}(t_0)| = \alpha(t_0)$ , con  $\alpha(t_0)$  dato dalla prima delle (33.38).

Sia  $\varphi_\delta$  l'angolo tra  $\hat{\xi}_\delta$  e  $\hat{\xi}(t_0)$ . Si ha

$$B_\delta(t_0) = \tilde{B}_\delta \tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_\delta) \tilde{B}_\delta^T, \quad (33.41)$$

dove  $\tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_\delta)$  rappresenta la rotazione di  $\theta_\delta$  intorno all'asse  $\boldsymbol{\xi}(t_0)$  individuato dal versore  $\hat{\xi}(t_0)$ , e  $\tilde{B}_\delta$  è la rotazione di  $\varphi_\delta$  che sovrappone  $\boldsymbol{\xi}(t_0)$  a  $\boldsymbol{\xi}_\delta$  (e ricordando che  $B_\delta(t_0)$  è la rotazione di un angolo  $\theta_\delta$  intorno all'asse  $\boldsymbol{\xi}_\delta$ , cfr. la (33.38)).

Per  $\delta \rightarrow 0$ , si ha  $\varphi_\delta \rightarrow 0$ , e quindi  $\tilde{B}_\delta = \mathbb{1} + O(\delta)$ ; inoltre

$$\tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_\delta) = \mathbb{1} + \delta \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_\delta) \right|_{\delta=0} + O(\delta^2), \quad (33.42)$$

e quindi, tenendo conto del fatto che  $\tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_0) = \mathbb{1}$  e  $\tilde{B}_\delta \tilde{B}_\delta^T = \mathbb{1}$ , la (33.41) si può scrivere

$$B_\delta(t_0) = \mathbb{1} + (\alpha(t_0)\delta) A_{\hat{\xi}(t_0)} + O(\delta^2), \quad (33.43)$$

dove  $A_{\hat{\xi}(t_0)}$  è usato conformemente alle notazioni di §33.17 e  $\alpha(t_0) = \dot{\theta}(0)$  è definito come nella prima delle (33.39). Dal confronto della (33.43) con la (33.40), tenendo conto che l'azione di  $A_{\hat{\xi}(t_0)}$  su un qualsiasi vettore  $\mathbf{q}$  si può scrivere  $A_{\hat{\xi}(t_0)}\mathbf{q} = [\hat{\xi}(t_0), \mathbf{q}]$  (cfr. di nuovo §33.17), segue allora che  $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \alpha(t_0)\hat{\xi}(t_0)$ , così che la dimostrazione del teorema è completa. ■

**33.36. Osservazione.** Il teorema 33.34 fornisce un'interpretazione geometrica del vettore velocità angolare come velocità angolare istantanea di rotazione e della sua direzione come *asse istantaneo di rotazione* (cfr. la fine di §33.23), così giustificando la definizione 33.26.

Infatti in ogni istante  $t_0$  il moto è assimilabile a una rotazione intorno all'asse  $\hat{\xi}(t_0)$  con velocità angolare di intensità  $\alpha(t_0)$  (cfr. la (33.38)), che si ottiene considerando rotazioni infinitesime, a partire dall'istante  $t_0$  fino all'istante  $t_0 + \delta$ , e passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$ .

Il ragionamento è quindi del tutto analogo a quello che si segue quando si dimostra che la velocità istantanea si ottiene come limite del rapporto incrementale relativo a spostamenti infinitesimi: infatti, considerata la posizione  $x(t_0)$  che un punto ha all'istante iniziale  $t_0$ , se si considerano spostamenti infinitesimi da  $x(t_0)$  a  $x(t_0 + \delta)$  (posizione all'istante  $t_0 + \delta$ ), si può definire la velocità (uniforme)  $\delta^{-1}[x(t_0 + \delta) - x(t_0)]$

e farne il limite per  $\delta \rightarrow 0$ , ottenendo così una quantità  $v(t_0) \equiv \dot{x}(t_0)$ , che chiamiamo *velocità istantanea*.

**33.37.** LEMMA. *Se il sistema mobile  $K$  ruota rispetto a un suo punto  $\mathbf{O}$ , allora la velocità  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$  di un punto mobile rispetto al sistema fisso  $\kappa$  (velocità assoluta) è data da*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_T, \quad (33.44)$$

dove  $\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}}$  è la velocità del punto mobile rispetto al sistema  $K$  (velocità relativa) e  $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}]$  è la velocità rotatoria di trascinamento.

**33.38.** Dimostrazione del lemma 33.37. Se il punto mobile si sposta anche nel sistema  $K$  ( $\dot{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{0}$ ), la (33.10) dà, tenendo conto anche della (33.27),

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q} + B\dot{\mathbf{Q}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}] + \mathbf{v}', \quad (33.45)$$

che comporta la (33.44). ■

**33.39.** TEOREMA. *La velocità di un punto mobile calcolata rispetto a un sistema fisso  $\kappa$  (velocità assoluta  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$ ) e quella calcolata rispetto a un sistema mobile  $K$  (velocità relativa  $\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}}$ ) sono legate dalla relazione*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_0, \quad (33.46)$$

dove  $\mathbf{v}_T = \dot{B}\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q} - \mathbf{r}]$  e  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$  è la velocità del sistema mobile di coordinate rispetto a quello fisso. La velocità  $\mathbf{v}_T + \mathbf{v}_0$  prende il nome di velocità di trascinamento, di cui  $\mathbf{v}_T$  costituisce la componente rotatoria e  $\mathbf{v}_0$  la componente traslatoria.

**33.40.** Dimostrazione del teorema 33.39. Segue dai lemmi 33.11 e 33.37, considerando un sistema mobile ausiliario  $K_1$  che si muove di moto traslatorio rispetto a  $\kappa$  e rispetto al quale il sistema  $K$  si muove di moto rotatorio intorno a un punto  $O \in K_1$ . ■

**33.41.** LEMMA. *Componendo due moti di rotazione rispetto allo stesso punto fisso  $O$ , si ottiene un moto la cui velocità angolare è in ogni istante la somma delle velocità angolari dei moti componenti.*

**33.42.** Dimostrazione del lemma 33.41. Sia  $\kappa$  un sistema fisso,  $K_1$  un sistema mobile rispetto a  $\kappa$  e  $K_2$  un sistema mobile rispetto a  $K_1$ . Quindi se  $\mathbf{Q}_2 \in K_2$ , si ha  $\mathbf{Q}_1 = B_2\mathbf{Q}_2 \in K_1$ , e  $\mathbf{q} = B_1\mathbf{Q}_1 \in \kappa$ , così che  $\mathbf{q} = B_1B_2\mathbf{Q}_2$ , con  $B_1B_2: K_2 \rightarrow \kappa$ .

La velocità angolare del moto risultante è pertanto

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{d}{dt}(B_1B_2) \right] (B_1B_2)^{-1} \\ &= \dot{B}_1B_1^{-1} + B_1\dot{B}_2B_2^{-1}B_1^{-1} = \dot{B}_1B_1^{-1} + B_1A_2B_1^{-1} \equiv A_1 + B_1A_2^{\text{rel}}B_1^{-1}, \end{aligned} \quad (33.47)$$

dove  $A_1 = \dot{B}_1B_1^{-1}$  è la velocità angolare del sistema  $K_1$  rispetto a  $\kappa$  e  $A_2^{\text{rel}} = \dot{B}_2B_2^{-1}$  è la velocità angolare del punto mobile solidale con il sistema  $K_2$  rispetto al sistema  $K_1$ ,

così che  $A_2 \equiv B_1 A_2^{\text{rel}} B_1^{-1}$  è la matrice che rappresenta  $A_2$  nel sistema  $\kappa$ : quindi  $A = A_1 + A_2$ . Se  $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$  sono i vettori che descrivono le velocità angolari corrispondenti ai tre operatori lineari  $A, A_1, A_2$ , si ha quindi  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ . ■

**33.43.** ESEMPIO. La velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  della Terra è diretta dal Polo Sud al Polo Nord, e ha (approssimativamente) modulo costante uguale a  $|\boldsymbol{\omega}| = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$ .

### 34. Forze d'inerzia

**34.1. Introduzione.** Nel presente capitolo consideremo il problema, al quale abbiamo accennato in §33.1, di vedere come la legge del moto di un sistema meccanico (legge di Newton) sia modificata in un sistema di riferimento mobile rispetto alla forma che esse assumono in un sistema di riferimento fisso. Il risultato che troveremo è che possiamo ancora scrivere una legge della stessa forma della legge di Newton, purché alla forza effettivamente agente si aggiungano delle forze efficaci che prendono il nome di forze apparenti. La ragione del nome è la seguente: tali forze non corrispondono a nessun agente reale, ma sono dovute semplicemente al fatto che il sistema di riferimento è mobile, così che un osservatore che effettui esperimenti in tale sistema di riferimento “risente” del fatto di essere in moto e può descrivere l'effetto di tale moto attraverso delle forze supplementari (fittizie) che si sommano a quella reale.

**34.2. TEOREMA.** *In un sistema di coordinate  $K$  che si muova di moto traslatorio rispetto a un sistema inerziale  $\kappa$ , il moto dei sistemi meccanici avviene come se il sistema  $K$  fosse inerziale, con l'unica differenza che su ogni punto di massa  $m$  agisce una forza supplementare*

$$\mathbf{F}_I = -m\ddot{\mathbf{r}}, \quad (34.1)$$

(che prende il nome di forza d'inerzia), dove  $\ddot{\mathbf{r}}$  è l'accelerazione del sistema  $K$ .

**34.3. Dimostrazione del teorema 34.2.** Per la (33.7), con  $B_t = \mathbf{1}$ , risulta  $\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \mathbf{r}$ . Quindi si ha  $\ddot{\mathbf{Q}} = \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{r}}$ . ■

**34.4. LEMMA.** *Dato un qualsiasi vettore  $\mathbf{X} \in K$ , tale che  $\mathbf{x} = B\mathbf{X} \in \kappa$ , possiamo scrivere  $\dot{B}\mathbf{X} = B[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X}]$ , se  $\boldsymbol{\omega} = B\boldsymbol{\Omega}$  è la velocità angolare che corrisponde alla rotazione  $B$ .*

**34.5. Dimostrazione del lemma 34.4.** Per il teorema 33.24, si ha  $\dot{B}\mathbf{X} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}]$ . Poiché  $B$  conserva la metrica e l'orientazione (cfr. §33.2) e lo stesso fa il prodotto vettoriale, abbiamo  $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}] = [B\boldsymbol{\Omega}, B\mathbf{X}] = B[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{X}]$ . ■

**34.6. TEOREMA (CORIOLIS).** *Supponiamo che in un sistema di coordinate fisso  $\kappa$  il moto avvenga secondo l'equazione di Newton  $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}$ ; in un sistema di coordinate rotante  $K$  il moto avviene come se in ogni punto mobile  $\mathbf{Q} = B^{-1}\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q} \in \kappa$ , di massa*

$m$ , agissero tre forze supplementari (forze d'inerzia o forze apparenti), tali che

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} + (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3), \quad (34.2)$$

dove  $B\mathbf{F} = \mathbf{f}$ , e

- (1)  $\mathbf{F}_1 = -m[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]$  è la forza inerziale di rotazione,
- (2)  $\mathbf{F}_2 = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}]$  è la forza di Coriolis (o forza complementare),
- (3)  $\mathbf{F}_3 = -m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]]$  è la forza centrifuga.

**34.7.** *Dimostrazione del teorema 34.6.* Poiché  $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$ , derivando e utilizzando il lemma 34.4, con  $\mathbf{X} = \mathbf{Q}$ , otteniamo

$$\dot{\mathbf{q}} = B(\dot{\mathbf{Q}} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]), \quad (34.3)$$

e, derivando una seconda volta, quindi riutilizzando il lemma 34.4 con  $\mathbf{X} = \dot{\mathbf{Q}} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]$ , abbiamo

$$\ddot{\mathbf{q}} = B(\ddot{\mathbf{Q}} + 2[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}] + [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]] + [\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{Q}]), \quad (34.4)$$

da cui segue la (34.2). ■

**34.8.** *Osservazione.* La forza inerziale di rotazione  $\mathbf{F}_1$  in (34.2) si osserva solo nel caso di una rotazione non uniforme.

**34.9.** *Osservazione.* La forza centrifuga  $\mathbf{F}_3$  in (34.2) è rivolta sempre in direzione perpendicolare all'asse istantaneo di rotazione, nel verso di allontanamento. Il suo modulo è uguale a  $|\boldsymbol{\Omega}|^2 r$ , se  $r$  è la distanza dall'asse. Si noti che, a differenza delle forze  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_3$ , la forza centrifuga non dipende dalla velocità del moto relativo e (al pari di  $\mathbf{F}_1$ ) agisce anche su corpi che sono in quiete nel sistema  $K$ . Cfr. la figura 34.1.

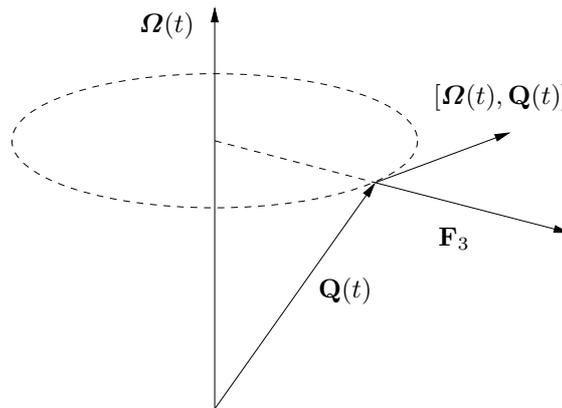


FIGURA 34.1. Forza centrifuga.

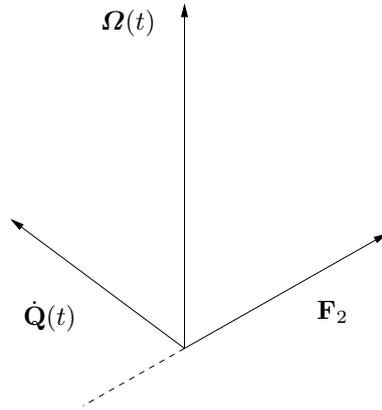


FIGURA 34.2. Forza di Coriolis.

**34.10. Osservazione.** La forza di Coriolis  $\mathbf{F}_2$  in (34.2) dipende dalla velocità  $\dot{\mathbf{Q}}$ ; cfr. la figura 34.2.

Nell'emisfero settentrionale spinge verso destra un corpo che si muova sulla Terra (tangenzialmente alla sua superficie) e verso Est un corpo che cada sulla Terra (normalmente alla sua superficie).

Alcuni esempi di come agisce la forza di Coriolis nel caso di moti che avvengano sulla superficie terrestre sono rappresentati nella figura 34.3.

**34.11. ESEMPIO.** Poiché la Terra ruota uniformemente (cfr. l'esempio 33.43), si può assumere  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$ . La forza centrifuga è nulla ai poli, e assume valore massimo all'equatore dove vale una frazione  $p$  del peso, con  $p$  dato da

$$p = \frac{|\boldsymbol{\Omega}|^2 \rho}{|\mathbf{g}|} \approx \frac{(7.3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (6.4 \cdot 10^6)}{9.8} \approx \frac{3}{1000} \quad (34.5)$$

(qui  $\rho$  è il raggio terrestre e  $\mathbf{g}$  è l'accelerazione di gravità, rivolta verso il centro della terra). Quindi in esperimenti di laboratorio gli effetti della rotazione terrestre si manifestano essenzialmente attraverso la sola forza di Coriolis. Per scopi pratici si può quindi approssimare la (34.2) in

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = m\mathbf{g} + 2m[\dot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\Omega}], \quad (34.6)$$

(per tener conto eventualmente della forza centrifuga, si può ridefinire  $\mathbf{g}$  a un valore che dipende dalla latitudine  $\lambda$ :  $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}(1 - p \cos \lambda)$ , cfr. la (34.5)).

**34.12. ESEMPIO.** Un sasso è lasciato cadere in un pozzo profondo  $\ell = 250$  m, alla

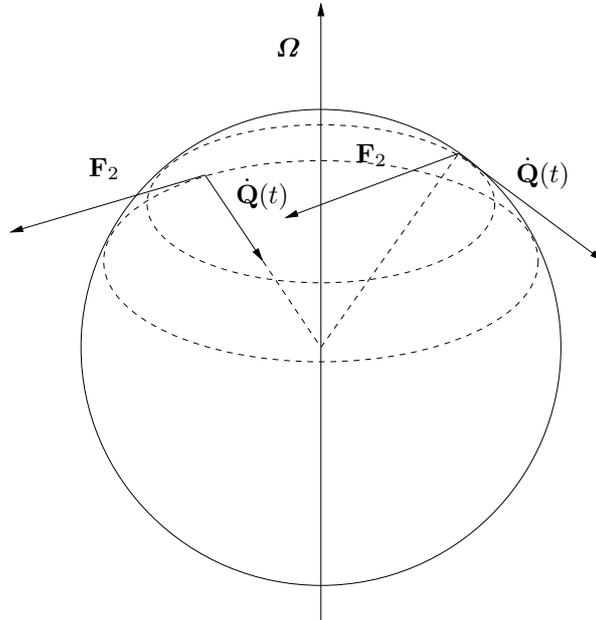


FIGURA 34.3. Forza di Coriolis nel caso di moti che avvengano sulla superficie della terra. Sono presi in considerazione due tipi di moto sull'emisfero settentrionale: un moto tangenziale alla superficie e diretto verso Ovest (a destra) e un moto normale alla superficie e diretto verso il basso (a sinistra). Nel primo caso la forza di Coriolis spinge verso l'asse di rotazione della Terra ed è perpendicolare a tale asse, mentre nel secondo caso spinge verso Est.

latitudine  $\lambda = 60^\circ$ . Di quanto si allontana dalla verticale ?

**34.13.** *Discussione dell'esempio 34.12.* L'equazione (34.6) si può risolvere per approssimazioni successive, scrivendo la soluzione nella forma  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1\Omega + O(\Omega^2)$ , dove  $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}| \ll 1$ .

Quindi, all'ordine zero,  $\ddot{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{g}$ , che, risolta tenendo conto delle condizioni iniziali ( $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ ), dà

$$\mathbf{Q}_0(t) = \mathbf{Q}_0(0) + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2. \quad (34.7)$$

Quindi, l'equazione per  $\mathbf{Q}_1$  diventa,

$$\ddot{\mathbf{Q}}_1\Omega = 2[\mathbf{g}, \boldsymbol{\Omega}]t, \quad (34.8)$$

che, risolta, dà

$$\mathbf{Q}_1(t)\Omega = \frac{t^3}{3}[\mathbf{g}, \boldsymbol{\Omega}]. \quad (34.9)$$

Si trova quindi, trascurando i termini  $O(\Omega^2)$ , che la deviazione del sasso dalla verticale, dopo una caduta di 250 m, è approssimativamente di

$$\frac{1}{3} \left( \frac{2\ell}{|\mathbf{g}|} \right)^{\frac{3}{2}} |\mathbf{g}| \Omega \cos \lambda \approx 4 \text{ cm}, \quad (34.10)$$

verso oriente (cfr. l'osservazione 2.10). Ovviamente perché il risultato trovato sia significativo, occorrerebbe una stima dell'errore che si commette nel trascurare le correzioni  $O(\Omega^2)$  (cfr. l'esercizio 5 più avanti).

**34.14.** ESEMPIO (PENDOLO DI FOUCAULT). Studiare le piccole oscillazioni di un pendolo semplice tenendo conto della forza di Coriolis.

**34.15.** *Discussione dell'esempio 34.14.* Scegliamo un sistema di coordinate  $\kappa = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  solidale con la Terra, con asse  $\mathbf{e}_z$  diretto verticalmente (rispetto alla sua superficie) e assi  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  diretti nel piano orizzontale (*i.e.* tangente alla superficie).

Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni si ha  $\dot{z} \approx 0$ , se  $(0, 0, \ell)$  sono le coordinate del punto di sospensione del pendolo. Infatti, se  $\ell$  è la lunghezza del pendolo, si ha  $\ell - z = \sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2}$ , e quindi  $z/\ell = O(x^2/\ell^2 + y^2/\ell^2)$ , che è nulla al primo ordine, così che  $\dot{z} = \dot{x}O(x/\ell) + \dot{y}O(y/\ell)$ , che è trascurabile rispetto a  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ , per oscillazioni in cui i rapporti  $x/\ell$  e  $y/\ell$  si mantengono piccoli. Più precisamente, tenendo conto che l'unica forza non apparente agente sul sistema è la forza peso  $m\mathbf{g}$  ed esprimendo il vincolo sulla lunghezza del pendolo come

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + (\ell - z)^2 - \ell^2 = 0, \quad (34.11)$$

scriveremo le equazioni del moto come

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\lambda \frac{\partial G}{\partial x} + 2(\Omega_z \dot{y} - \Omega_y \dot{z}), \\ \ddot{y} &= -\lambda \frac{\partial G}{\partial y} + 2(\Omega_x \dot{z} - \Omega_z \dot{x}), \\ \ddot{z} &= -g - \lambda \frac{\partial G}{\partial z} + 2(\Omega_y \dot{x} - \Omega_x \dot{y}), \\ 0 &= G \end{aligned} \quad (34.12)$$

dove  $G = G(x, y, z)$  data dalla (34.11),  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ , così che  $g = |\mathbf{g}|$ , e  $\lambda$  è un moltiplicatore di Lagrange (tale procedimento sarà giustificato più avanti, nel capitolo 9, quando discuteremo i vincoli). Quindi l'equazione del vincolo linearizzato diventa  $2\ell z = 0$  e, trascurando tutti i termini di ordine superiore al primo (in  $x/\ell$  e  $y/\ell$ ), abbiamo, dalla terza equazione di (34.12),

$$\ddot{z} = (2\lambda\ell - g) + 2(\Omega_y \dot{x} - \Omega_x \dot{y}) \approx (2\lambda\ell - g), \quad (34.13)$$

come è immediato verificare.

304 CAPITOLO 8. MOTI RELATIVI E SISTEMI DI RIFERIMENTO

Quindi la (34.13) implica  $2\lambda\ell = g$ , così che, se definiamo  $\omega^2 = g/\ell$  e teniamo conto che il vincolo impone che al primo ordine il moto sia vincolato sul piano  $z = 0$ , otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + 2\Omega_z \dot{y}, \\ \ddot{y} = -\omega^2 y - 2\Omega_z \dot{x}, \end{cases} \quad (34.14)$$

dove  $\Omega_z = |\mathbf{\Omega}| \sin \lambda$ , se  $\lambda$  è la latitudine.

Questo vuol dire che, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, la componente verticale della forza di Coriolis è nulla e la componente orizzontale è data da

$$\mathbf{F}_2 = 2m\Omega_z \dot{y} \mathbf{e}_x - 2m\Omega_z \dot{x} \mathbf{e}_y. \quad (34.15)$$

Se poniamo  $w = x + iy$  e approssimiamo

$$\sqrt{\Omega_z^2 + \omega^2} \approx \omega + O(\Omega_z^2), \quad (34.16)$$

abbiamo che la soluzione di (34.12), in termini della variabile  $w$ , diventa

$$w(t) = e^{-i\Omega_z t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}), \quad (34.17)$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono costanti che dipendono dai dati iniziali.

Per  $\Omega_z = 0$  (all'equatore) si ottengono le usuali oscillazioni armoniche. Altrimenti, l'effetto della forza di Coriolis si manifesta attraverso una rotazione di tutto il sistema con una velocità angolare  $\Omega_z$  in senso orario. In particolare, se le condizioni iniziali corrispondono a quello che in assenza di forza di Coriolis sarebbe un moto piano (e.g.  $y(0) = x(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  e  $\dot{x}(0) > 1$ , così che il moto, in assenza di forza di Coriolis, avverrebbe nel piano  $y = 0$ ), allora il piano di oscillazione del pendolo ruoterà in senso orario con velocità angolare  $\Omega_z$  rispetto al sistema di coordinate solidale con la Terra; cfr. la figura 34.4 per un'altra scelta delle condizioni iniziali.

Infatti, con la scelta dei dati iniziali, si ottiene

$$w(t) = e^{-i\Omega_z t} \frac{\sin \omega t}{\omega}, \quad (34.18)$$

e quindi

$$x(t) = \cos \Omega_z t \frac{\sin \omega t}{\omega}, \quad y(t) = -\sin \Omega_z t \frac{\sin \omega t}{\omega}. \quad (34.19)$$

Se scegliamo un sistema di coordinate in cui il moto sia

$$x'(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}, \quad y'(t) = 0, \quad (34.20)$$

allora possiamo introdurre la trasformazione di coordinate  $(x', y') \rightarrow (x, y)$  definita da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega_z t & \sin \Omega_z t \\ -\sin \Omega_z t & \cos \Omega_z t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (34.21)$$

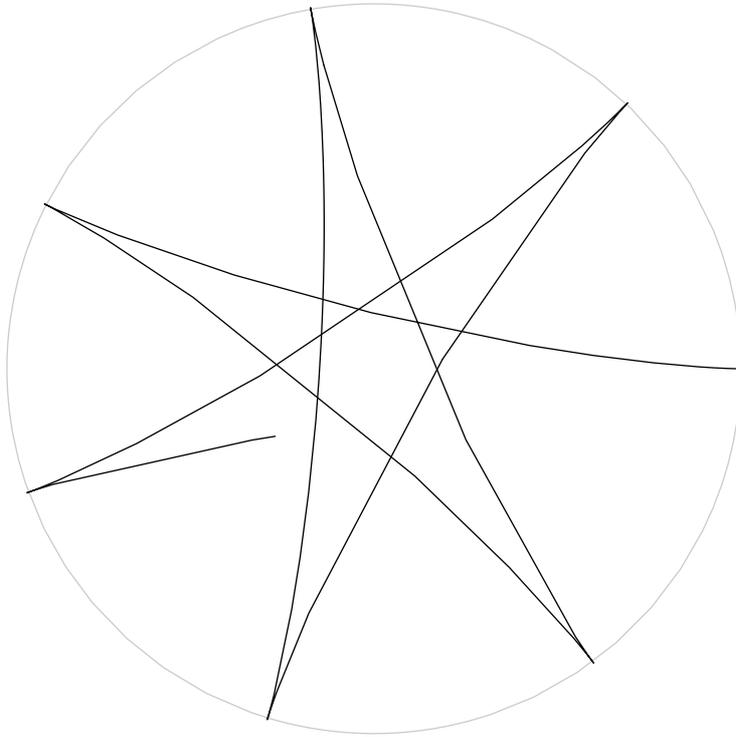


FIGURA 34.4. Visione dall'alto del moto del pendolo di Foucault lasciato oscillare in corrispondenza dei poli della Terra, con condizioni iniziali  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ,  $x(0) > 0$  e  $\dot{x}(0) < 0$ .

Nel sistema di coordinate  $(x', y')$  il moto consiste in un'oscillazione lungo l'asse  $x'$ . Quindi nel sistema di coordinate  $(x, y)$ , il moto si ottiene applicando la matrice di rotazione in (34.21) alla (34.20): si ottiene quindi la composizione di un'oscillazione lungo una direzione con una rotazione della direzione di oscillazione in senso orario intorno all'asse verticale (cfr. la (33.36)). Ai poli il piano di oscillazione compie una rotazione ogni 24 ore (ed è fisso rispetto a un sistema fisso).

**34.16. ESEMPIO.** Se si lascia scorrere via l'acqua di un lavandino pieno nell'emisfero settentrionale, l'acqua compirà un moto di spiraleggiamento verso il sifone in senso orario. Infatti si può assumere che l'acqua effettui un moto laminare parallelamente al piano del lavandino, dal bordo verso il sifone, (almeno fintanto che le sue molecole non lo abbiano raggiunto; una volta raggiunto poi defluiscono rapidamente), così che il flusso d'acqua, sotto l'effetto della forza di Coriolis, descrive un moto rotatorio

mentre si avvicina al sifone.

**34.17.** ESEMPIO. Un fiume scorre con velocità di 3 km/h. Per quale raggio di curvatura di un'ansa del fiume la forza di Coriolis è più forte della forza centrifuga, dovuta alla svolta compiuta dal fiume?

**34.18.** *Discussione dell'esempio 34.17.* Se siamo interessati solo agli ordini di grandezza delle forze, possiamo scrivere che la forza di Coriolis ha modulo  $|\mathbf{F}_2| \approx \Omega v$ , se  $v$  è il modulo della velocità di scorrimento del fiume, mentre la forza centrifuga ha modulo  $|\mathbf{F}_3| \approx v^2/r$ , se  $r$  è il raggio di curvatura dell'ansa; cfr. la figura 34.5. Possiamo definire quindi un valore di soglia  $r_0$  tale che per  $r \approx r_0$  si ha  $|\mathbf{F}_2| \approx |\mathbf{F}_3|$ . Con i dati del problema si ha  $r_0 \approx 10$  km e la forza di Coriolis tende a prevalere per  $r > r_0$ . In conclusione il raggio di curvatura dell'ansa non deve essere più piccolo di una decina di km per fiumi che si trovano a latitudini medie (così che possiamo prendere  $\cos \lambda$  di ordine 1).

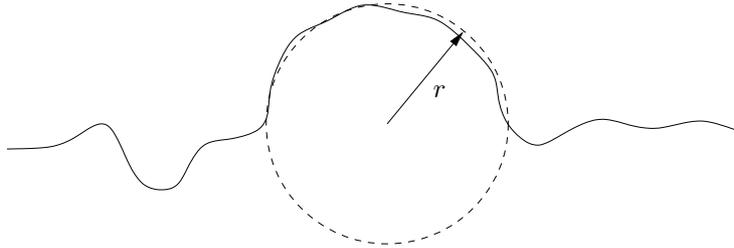


FIGURA 34.5. Discussione dell'esempio 34.17.

**34.19.** *Osservazione.* La discussione dell'esempio 34.17 spiega perché i grossi fiumi dell'emisfero settentrionale erodono principalmente la riva destra, mentre i fiumi con anse di piccola curvatura erodono alternativamente sia la riva destra sia quella sinistra (cioè le rive esterne rispetto all'ansa).

**34.20.** TEOREMA. *Supponiamo che in un sistema di coordinate fisso  $\kappa$  il moto avvenga secondo l'equazione di Newton  $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}$ ; in un sistema di coordinate mobile  $K$  il moto avviene come se in ogni punto mobile  $\mathbf{Q} = D\mathbf{q} = B\mathbf{q} + \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{q} \in \kappa$ , di massa  $m$ , agissero quattro forze supplementari (forze d'inerzia), tali che*

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} + (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4), \quad (34.22)$$

dove  $B\mathbf{F} = \mathbf{f}$ , e

(1)  $\mathbf{F}_1 = -m[\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{Q}]$  è la forza inerziale di rotazione,

(2)  $\mathbf{F}_2 = -2m[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]$  è la forza di Coriolis (o forza complementare),

- (3)  $\mathbf{F}_3 = -m[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]]$  è la forza centrifuga,  
 (4)  $\mathbf{F}_4 = -m\ddot{\mathbf{r}}$  è la forza inerziale di traslazione.

**34.21.** *Dimostrazione del teorema (34.20).* Si può ragionare come per la dimostrazione del Teorema 34.6, tenendo conto che  $\dot{\mathbf{q}}$  è dato dalla (33.46) nel caso generale di un moto qualsiasi. ■

## Nota bibliografica

Nella trattazione abbiamo seguito prevalentemente [Arnol'd 2], Cap. VI, tranne che per la discussione degli argomenti trattati da §33.31 a §33.35, tratta da [Dell'Antonio], Cap. IV.

Gli esempi 34.12 e 34.17 sono presi da [Arnol'd2], mentre la discussione dell'esempio 34.15 segue [Dell'Antonio].

Gli esercizi sono ispirati in parte a [Bressan-Grioli], Cap. IV.

Per le proprietà (elementari) di algebra che sono state brevemente richiamate si può vedere *e.g.* [Lang] o [Kuroš].

## Esercizi

**Esercizio 1.** Verificare che lo spazio della matrici  $GL(n, \mathbb{R})$  definito in §33.2 forma un gruppo (non commutativo) rispetto all'operazione di moltiplicazione tra matrici.

**Esercizio 2.** Dimostrare che l'insieme delle matrici antisimmetriche  $n \times n$  a elementi reali forma un sottospazio lineare di  $M(n, \mathbb{R})$  di dimensione  $n(n-1)/2$ . Dedurre in particolare che l'insieme  $L_{as}$  delle matrici antisimmetriche in  $\mathbb{R}^3$ , introdotto in §33.16, forma un sottospazio lineare di dimensione 3.

**Esercizio 3.** Verificare che la rotazione  $B^3(\theta): K \rightarrow \kappa$  di un angolo  $\theta$  (in senso antiorario) intorno all'asse  $\mathbf{e}_z$  è rappresentata dalla matrice

$$B^3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

*i.e.* se  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{Q}$  sono le coordinate nei sistemi di riferimento  $\kappa$  e  $K$ , rispettivamente, si ha  $\mathbf{q} = B^3(\theta)\mathbf{Q}$ , con  $B^3(\theta)$  data dall'equazione sopra.

Verificare allo stesso modo che le matrici che rappresentano rotazioni intorno agli assi  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  sono date rispettivamente da

$$B^1(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{pmatrix},$$

dove le rotazioni si intendono sempre in senso antiorario nel piano ortogonale all'asse rispetto alla direzioni in cui punta l'asse.

**Esercizio 4.** Un disco, di raggio  $R = 15$  cm, gira su un fonografo con velocità angolare costante  $\omega = 33$  giri/min. Una mosca parte dal centro del disco in direzione radiale mantenendo una velocità

308 CAPITOLO 8. MOTI RELATIVI E SISTEMI DI RIFERIMENTO

di intensità costante  $v = 1$  cm/sec.

- (1) Dire quanti giri deve effettuare il disco perché la mosca, muovendosi sempre in linea retta nel proprio sistema di riferimento, raggiunga il bordo del disco.
- (2) Determinare la traiettoria percorsa dalla mosca in un sistema di riferimento fisso la cui origine coincida con il centro del disco.
- (3) Determinare il tempo necessario perché la mosca raggiunga il bordo del disco.
- (4) Determinare la lunghezza della traiettoria percorsa dalla mosca fino all'istante in cui raggiunge il bordo del disco.
- (5) Determinare la forza di Coriolis che agisce sulla mosca.

**Esercizio 5.** Verificare che se, nel discutere l'esempio 34.12, si tiene conto anche della forza centrifuga a non si compie alcuna approssimazione, in un sistema di riferimento solidale con la Terra, con asse  $\mathbf{e}_z$  diretto verticalmente (rispetto alla sua superficie) e asse  $\mathbf{e}_x$  contenuto nel piano individuato dai due vettori  $\mathbf{e}_z$  e  $\Omega$  (se  $\Omega$  è la velocità di rotazione della Terra), la soluzione esatta delle equazioni

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{g} - 2[\Omega, \dot{\mathbf{Q}}] - [\Omega, [\Omega, \mathbf{Q}]],$$

che descrivono il moto del sasso, lasciato inizialmente nella posizione iniziale  $(x, y, z) = \mathbf{0} \equiv (0, 0, 0)$  (quindi nell'origine del sistema di riferimento scelto) con velocità nulla, è data da

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(\Omega^2 \ell - g \cos \lambda) \sin \lambda}{\Omega^2} \left[ 1 - \cos \Omega t - \Omega t \sin \Omega t \right] - \frac{g \sin \lambda \cos \lambda}{2} t^2, \\ y(t) &= \frac{(\Omega^2 \ell - g \cos \lambda)}{\Omega^2} \left[ -\Omega t \cos \Omega t + \sin \Omega t \right], \\ z(t) &= -\frac{(\Omega^2 \ell - g \cos \lambda) \cos \lambda}{\Omega^2} \left[ 1 - \cos \Omega t - \Omega t \sin \Omega t \right] - \frac{g \sin^2 \lambda}{2} t^2, \end{aligned}$$

con  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  e  $\Omega = |\Omega|$ , se  $\ell = \rho \cos \lambda$  è la distanza dell'origine  $\mathbf{0}$  del sistema di coordinate scelto dal centro della Terra (e  $\rho$  è il raggio della Terra; cfr. la (34.4) nell'esempio 34.11).

Verificare che, al primo ordine in  $\Omega$ , la soluzione sopra dà il risultato (34.8) trovato in §34.13.

Verificare che l'approssimazione fatta in §34.13 è quindi giustificata e dire fino a quale profondità del pozzo la discussione fatta in §34.13 può essere accettata.

**Esercizio 6.** Si definisce *riflessione* rispetto a un piano l'operazione che scambia ogni punto con la sua immagine speculare rispetto al piano (*i.e.* tale che ogni punto  $P$  di coordinate  $\mathbf{q}$  è scambiato con il punto di coordinate  $\mathbf{Q}$  lungo la retta passante per  $P$  e ortogonale al piano dalla parte opposta rispetto a  $P$ ). Dimostrare che le riflessioni conservano la metrica.

**Esercizio 7.** Dimostrare che il cambiamento di sistema di riferimento ottenuto come composizione di rotazioni, traslazioni e riflessioni non è una trasformazione rigida. [*Suggerimento.* Le riflessioni non conservano l'orientazione.]

**Esercizio 8.** Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema di riferimento fisso o assoluto), consideriamo una retta  $r$  che passa per  $O$  e forma un angolo  $\alpha$  con l'asse delle  $x$ . Sia  $O'$  un punto che si muove lungo  $r$  in modo che la sua coordinata lungo  $r$ , calcolata da  $O$ , varia nel tempo secondo la legge  $\rho = a \sin bt$ . Sia  $K = O'\xi\eta\zeta$  un sistema di riferimento (sistema di riferimento mobile o relativo), con l'asse  $\zeta$  parallelo all'asse  $z$ , che ruota con velocità angolare  $\omega$  costante intorno all'asse verticale  $\zeta$ . Se  $\theta(t)$  è l'angolo che l'asse  $\xi$  forma con la retta  $r$  al tempo  $t$ , si assuma che all'istante  $t = 0$  si abbia  $\theta(0) = 0$ .

Un punto  $P$  si muove lungo la direzione  $\xi$  secondo la legge oraria  $\xi(t) = e^{bt}$ , con  $b$  costante.

- (1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione con una rotazione,  $D = C \circ B$  e determinare la forma di  $C$  e  $B$ .
- (2) Determinare la legge del moto nel sistema di riferimento assoluto.
- (3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .
- (4) Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .
- (5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .

(6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .  
 (7) Determinare la forza di Coriolis  $\mathbf{F}_2$  che agisce sul punto  $P$ .  
 [Soluzione. (1) Si ha  $B = B^3(\alpha + \omega t)$ , con le notazioni dell'esercizio 3, e  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , dove  $\mathbf{r}$  è dato da  $\mathbf{r} = (a \cos \alpha \sin bt, a \sin \alpha \sin bt, 0)$ . (2) Si ha  $x(t) = a \cos \alpha \sin bt + e^{bt} \cos(\alpha + \omega t)$ ,  $y(t) = a \sin \alpha \sin bt + e^{bt} \sin(\alpha + \omega t)$ ,  $z(t) = 0$ . (3) Si ha  $\mathbf{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ : quindi  $\dot{x}(t) = ab \cos \alpha \cos bt + e^{bt}[b \cos(\alpha + \omega t) - \omega \sin(\alpha + \omega t)]$ ,  $\dot{y}(t) = ab \sin \alpha \cos bt + e^{bt}[b \sin(\alpha + \omega t) + \omega \cos(\alpha + \omega t)]$ ,  $\dot{z}(t) = 0$ . (4) Si ha  $\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}}$ , quindi  $\mathbf{v}' = (e^{bt}b \cos(\alpha + \omega t), e^{bt}b \sin(\alpha + \omega t), 0)$ . (5) Si ha  $\mathbf{v}_0 = (ab \cos \alpha \cos bt, ab \sin \alpha \cos bt, 0)$ . (6) Si ha  $\mathbf{v}_T = (-\omega e^{bt} \sin(\alpha + \omega t), \omega e^{bt} \cos(\alpha + \omega t), 0)$ . (7) Si ha  $\mathbf{F}_2 = (0, -2\omega b e^{bt}, 0)$ .]

**Esercizio 9.** Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema di riferimento fisso o assoluto), consideriamo anche un sistema di riferimento mobile (o relativo)  $K = O'\xi\eta\zeta$ , che all'istante  $t = 0$  coincide con  $\kappa$  e ruota intorno all'asse  $\zeta$ , parallelo a  $z$ , con velocità angolare costante  $\omega$ . Il sistema di riferimento  $K$  si muove rispetto a  $\kappa$  secondo una delle due seguenti modalità:

- (a)  $O'$  si muove rispetto a  $O$  con accelerazione costante  $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$  e con velocità iniziale  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$ , mentre  $\omega = 0$ ;
- (b)  $O'$  si muove rispetto a  $O$  con accelerazione nulla,  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , e con velocità iniziale  $\mathbf{v}(0) = (1, 1, 0)$ , mentre  $\omega > 0$ .

Indichiamo con  $\mathbf{q}$  le coordinate nel sistema  $\kappa$  e con  $\mathbf{Q}$  le coordinate nel sistema  $K$ . Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$ , situato inizialmente in  $\mathbf{q}(0) = (0, 0, 1)$  e con velocità iniziale  $\dot{\mathbf{q}}(0) = (0, 1, 2)$ . Sia  $\mathbf{f} = (1, 0, -1)$  la forza (costante) che agisce sul punto  $P$ .

- (1) Determinare il moto assoluto  $\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .
- (2) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione con una rotazione,  $D = C \circ B$  e determinare la forma di  $C$  e  $B$  in entrambi i casi (a) e (b).
- (3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ , la velocità relativa  $\mathbf{v}'$  e la velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T + \mathbf{v}_0$  in entrambi i casi (a) e (b).
- (4) Determinare la forza di Coriolis  $\mathbf{F}_2$  che agisce sul punto  $P$  in entrambi i casi (a) e (b).

[Soluzione. (1) Si ha  $x(t) = t^2/2$ ,  $y(t) = t$  e  $z(t) = -(t^2/2) + 2t + 1$ . (2) Nel caso (a) si ha  $B = \mathbb{1}$  e  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (t^2/2, t^2/2, 0)$ . Nel caso (b) si ha  $B = B^3(\omega t)$ , con le notazioni dell'esercizio 3, e  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (t, t, 0)$ . (3) Si ha  $\mathbf{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ , quindi  $\mathbf{v} = (t, 1, 2 - t)$ . Nel caso (a) si ha  $\mathbf{v}_0 = (t, t, 0)$ ,  $\mathbf{v}_T = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{v}' = (0, 1 - t, 2 - t)$ , mentre nel caso (b) si ha  $\mathbf{v}_0 = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_T = (0, \omega(t^2/2) - \omega t, 0)$  e  $\mathbf{v}' = (t - 1, -\omega(t^2/2) + \omega t, 2 - t)$ . (4) Nel caso (a) la forza di Coriolis è  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ , mentre nel caso (b) si ha  $\mathbf{F}_2 = (-2\omega(t - 1) \cos \omega t + (t^2 - 2t)\omega^2 \sin \omega t, 2\omega(t - 1) \sin \omega t + (t^2 - 2t)\omega^2 \cos \omega t, 0)$ .]

**Esercizio 10.** Si considerino due sistemi di riferimento  $\kappa$  e  $K$ , di cui  $\kappa = Oxyz$  (sistema di riferimento assoluto) è fisso e  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema di riferimento relativo) si muove nel modo seguente. L'origine  $O'$  di  $K$  si muove lungo una parabola nel piano  $(x, y)$  di equazione  $y = 1 + x^2$ , con legge oraria tale che la sua ascissa al tempo  $t$  è data da  $x_{O'}(t) = t$  e l'asse  $\xi$  è istante per istante tangente alla parabola e diretto verso destra. Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  è lasciato nella posizione  $\mathbf{q}(0) = (0, 2, 0)$  con velocità iniziale nulla ed è soggetto alla forza di gravità  $(0, -g, 0)$ .

- (1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione con una rotazione,  $D = C \circ B$  e determinare la forma di  $C$  e  $B$ .
- (2) Determinare il moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema di riferimento assoluto  $\kappa$  e il moto  $\mathbf{Q}(t)$  nel sistema di riferimento relativo  $K$ .
- (3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .
- (4) Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .
- (5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .
- (6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .
- (7) Determinare la forza di Coriolis  $\mathbf{F}_2$  che agisce sul punto  $P$ .

[Soluzione. (1) Si ha  $D = C \circ B$ , dove  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t) = (t, 1 + t^2, 0)$ , e  $B = B^3(\alpha(t))$ , con le notazioni dell'esercizio 3 e con  $\alpha(t) = \arctan 2t$ . (2) Si ha  $\mathbf{q}(t) = (0, 2 - g(t^2/2), 0)$  e  $\mathbf{Q}(t) = (-t \cos \alpha(t) + (1 - g(t^2/2) - t^2) \sin \alpha(t), t \sin \alpha(t) + (1 - g(t^2/2) - t^2) \cos \alpha(t), 0) = (1/\sqrt{1 + 4t^2})(t - gt^3 - 2t^3, 1 + t^2 - g(t^2/2), 0)$ , dove si è tenuto conto che si ha  $\cos \alpha(t) = 1/\sqrt{1 + 4t^2}$  e  $\sin \alpha(t) = 2t/\sqrt{1 + 4t^2}$ . (3) Si ha  $\mathbf{v} = (0, -gt, 0)$ . (4) Si ha  $\dot{\mathbf{Q}} = (\dot{Q}_1(t), \dot{Q}_2(t), \dot{Q}_3(t)) = (-\cos \alpha(t) + t\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) + (-gt - 2t) \sin \alpha(t) + (1 - g(t^2/2) - t^2)\dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t), (\sin \alpha(t) + t\dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) + (-gt - 2t) \cos \alpha(t) - (1 - g(t^2/2) - t^2)\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t), 0)$ , dove  $\dot{\alpha}(t) = 2/(1 + 4t^2)$ , così che risulta  $\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = (-1 + (1 - g(t^2/2) - t^2)\dot{\alpha}(t), t\dot{\alpha}(t) + (-gt - 2t), 0)$ . (5) Si ha  $\mathbf{v}_0 = (1, 2t, 0)$ . (6) Si ha  $\mathbf{v}_T = (-(1 - g(t^2/2) -$

310 CAPITOLO 8. MOTI RELATIVI E SISTEMI DI RIFERIMENTO

$t^2)\dot{\alpha}(t), -t\dot{\alpha}(t), 0)$ . (7) Si ha  $\mathbf{F}_2 = (2\dot{\alpha}(t)\dot{Q}_2(t), -2\dot{\alpha}(t)\dot{Q}_1(t), 0)$ .]

**Esercizio 11.** Dato un sistema di riferimento fisso  $Oxyz$ , si consideri un sistema di riferimento  $O'\xi\eta\zeta$  la cui origine  $O'$  si muove lungo la circonferenza situata nel piano  $(x, y)$ , di centro  $O$  e raggio  $r = 1$ , in modo tale che l'angolo che il vettore  $\mathbf{q}_{O'}$  forma con l'asse  $x$  sia dato da  $\alpha(t) = \alpha t^2$ , con  $\alpha$  costante; inoltre la terna  $O'\xi\eta\zeta$  ruota intorno all'asse  $\zeta$  (parallelo all'asse  $z$ ) in modo tale che l'angolo che l'asse  $\xi$  forma con l'asse  $x$  è dato da  $\beta(t) = \beta t^3$ , con  $\beta$  costante. Un punto  $P$  si muove lungo l'asse  $\xi$  con legge  $\xi(t) = \nu t$ , con  $\nu$  costante.

(1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione con una rotazione,  $D = C \circ B$  e determinare la forma di  $C$  e  $B$ .

(2) Determinare il moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema di riferimento assoluto  $\kappa$  e il moto  $\mathbf{Q}(t)$  nel sistema di riferimento relativo  $K$ .

(3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .

(4) Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .

(5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .

(6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ . (7) Determinare la forza di Coriolis  $\mathbf{F}_2$  che agisce sul punto  $P$ .

[*Soluzione.* (1) Risulta  $D = C \circ B$ , dove  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (\cos \alpha t^2, \sin \alpha t^2, 0)$ , e  $B = B^3(\beta t^3)$ , con le notazioni dell'esercizio 3. (2) Si ha  $\mathbf{Q}(t) = (\nu t, 0, 0)$  e  $\mathbf{q}(t) = (\cos \alpha t^2 + \nu t \cos \beta t^3 + \nu t, \sin \alpha t^2 + \nu t \sin \beta t^3, 0)$ . (3) La velocità assoluta è  $\mathbf{v} = (-2\alpha \sin \alpha t^2 + \nu \cos \beta t^3 - 3\beta \nu t^3 \sin \beta t^3, 2\alpha \cos \alpha t^2 + \nu \sin \beta t^3 + 3\beta \nu t^3 \cos \beta t^3, 0)$ . (4) La velocità relativa è data da  $\mathbf{v}' = (\nu \cos \beta t^3, \nu \sin \beta t^3, 0)$ . (5) Si ha  $\mathbf{v}_0 = (-2\alpha \sin \alpha t^2, 2\alpha \cos \alpha t^2, 0)$ . (6) Si ha  $\mathbf{v}_T = (-3\beta \nu t^3 \sin \beta t^3, 3\beta \nu t^3 \cos \beta t^3, 0)$ . (7) La forza di Coriolis è data da  $\mathbf{F}_2 = (0, -6\beta \nu t^3, 0)$ .]

**Esercizio 12.** Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muove in senso antiorario lungo la circonferenza di raggio 1 e centro il punto  $C = (0, 1)$  nel piano  $(x, y)$ . L'asse  $\zeta$  di  $K$  si mantiene sempre parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ , mentre l'asse  $\xi$  si mantiene sempre tangente alla circonferenza nel punto  $O'$ : i due sistemi  $\kappa$  e  $K$  coincidono all'istante iniziale  $t = 0$ .

La componente lungo l'asse  $x$  del vettore che individua il punto  $O'$  varia secondo la legge  $x_{O'}(t) = \sin t$ .

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove lungo l'asse  $\xi$  con legge oraria  $\xi(t) = a \sin bt$ , con  $a, b$  costanti positive.

(1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , *i.e.*  $D = C \circ B$ , e determinare  $C$  e  $B$ .

(2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema assoluto e  $\mathbf{Q}(t)$  nel sistema mobile.

(3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .

(4) Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .

(5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .

(6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .

(7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto  $P$ .

(8) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto  $P$ .

[*Soluzione.* (1) Risulta  $D = C \circ B$ , dove  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (\sin t, 1 - \cos t, 0)$ , e  $B = B^3(t)$ , con le notazioni dell'esercizio 3. (2) Si ha  $\mathbf{Q}(t) = (a \sin bt, 0, 0)$  e  $\mathbf{q}(t) = (a \sin bt \cos t + \sin t, a \sin bt \sin t + 1 - \cos t, 0)$ . (3) Si ha  $\mathbf{v} = (ab \cos bt \cos t - a \sin bt \sin t + \cos t, ab \cos bt \sin t + a \sin bt \cos t + \sin t, 0)$ . (4) Si ha  $\mathbf{v}' = (ab \cos bt \cos t, ab \cos bt \sin t, 0)$ . (5) Si ha  $\mathbf{v}_0 = (\cos t, \sin t, 0)$ . (6) Si ha  $\mathbf{v}_T = (-a \sin bt \sin t, a \sin bt \cos t, 0)$ . (7) La forza di Coriolis è data da  $\mathbf{F}_2 = (0, -2ab \cos bt, 0)$ . (8) Si ha  $\mathbf{F}_3 = (a \sin bt, 0, 0)$ .]

**Esercizio 13.** Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muove nel piano  $(x, y)$  lungo la spirale  $r(t) = \theta(t) = t$ . L'asse  $\zeta$  di  $K$  si mantiene sempre parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ , mentre il piano  $(\xi, \eta)$  ruota con velocità angolare costante  $\omega = 1$  intorno a  $O'$ . I due sistemi  $\kappa$  e  $K$  coincidono all'istante iniziale  $t = 0$ .

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove lungo l'asse  $\xi$  con legge oraria  $\xi(t) = t$ .

(1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , *i.e.*  $D = C \circ B$ , e determinare  $C$  e  $B$ .

(2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema assoluto e  $\mathbf{Q}(t)$  nel sistema mobile.

(3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .

(4) Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .

- (5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .
  - (6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .
  - (7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto  $P$ .
  - (8) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto  $P$ .
  - (9) Determinare l'istante  $t_0$  in cui il punto materiale  $P$  attraversa la circonferenza di raggio  $R = 10$  e centro  $C = (0, 0)$  nel piano  $(x, y)$ .
- [Soluzione. (1) Risulta  $D = C \circ B$ , dove  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (t \cos t, t \sin t, 0)$ , e  $B = B^3(t)$ , con le notazioni dell'esercizio 3. (2) Si ha  $\mathbf{Q}(t) = (t, 0, 0)$  e  $\mathbf{q}(t) = (2t \cos t, 2t \sin t, 0)$ . (3) Si ha  $\mathbf{v} = (2 \cos t - 2t \sin t, 2 \sin t + 2t \cos t, 0)$ . (4) Si ha  $\mathbf{v}' = (\cos t, \sin t, 0)$ . (5) Si ha  $\mathbf{v}_0 = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 0)$ . (6) Si ha  $\mathbf{v}_T = (-t \sin t, t \cos t, 0)$ . (7) La forza di Coriolis è data da  $\mathbf{F}_2 = (0, -2, 0)$ . (8) Si ha  $\mathbf{F}_3 = (t, 0, 0)$ . (9) Si ha  $t_0 = 5$ .]

**Esercizio 14.** Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muove nel piano  $(x, y)$  lungo il profilo  $y(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ; la componente lungo l'asse  $x$  del vettore che individua il punto  $O'$  varia secondo la legge  $x_{O'}(t) = t$ .

L'asse  $\zeta$  di  $K$  si mantiene sempre parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ , mentre l'asse  $\xi$  si mantiene sempre tangente alla curva  $y = y(x)$ .

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove lungo l'asse  $\xi$  con legge oraria  $\xi(t) = a \sin bt$ , con  $a, b$  costanti positive.

- (1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , i.e.  $D = C \circ B$ , e determinare  $C$  e  $B$ .
- (2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema assoluto e  $\mathbf{Q}(t)$  nel sistema mobile.
- (3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .
- (4) Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .
- (5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .
- (6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .
- (7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto  $P$ .
- (8) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto  $P$ .

[Soluzione. (1) Risulta  $D = C \circ B$ , dove  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (t, y_0(t), 0)$ , con  $y_0(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ , e  $B = B^3(\theta(t))$ , con le notazioni dell'esercizio 3 e con  $\theta(t) = \arctan(3t^2 - 12t + 9)$ . (2) Si ha  $\mathbf{Q}(t) = (a \sin bt, 0, 0)$  e  $\mathbf{q}(t) = (a \sin bt \cos \theta(t) + t, a \sin bt \sin \theta(t) + y_0(t), 0)$ . (3) Si ha  $\mathbf{v} = (ab \cos bt \cos \theta(t) - a\dot{\theta}(t) \sin bt \sin \theta(t) + 1, ab \cos bt \sin \theta(t) + a\dot{\theta}(t) \sin bt \cos \theta(t) + 3t^2 - 12t + 9, 0)$ , dove  $\dot{\theta}(t) = (6t - 12)/(1 + (3t^2 - 12t + 9)^2)$ . (4) Si ha  $\mathbf{v}' = (ab \cos bt \cos \theta(t), ab \cos bt \sin \theta(t), 0)$ . (5) Si ha  $\mathbf{v}_0 = (1, 3t^2 - 12t + 9, 0)$ . (6) Si ha  $\mathbf{v}_T = (-a\dot{\theta}(t) \sin bt \sin \theta(t), a\dot{\theta}(t) \sin bt \cos \theta(t), 0)$ . (7) La forza di Coriolis è data da  $\mathbf{F}_2 = (0, -2ab\dot{\theta}(t) \cos bt, 0)$ . (8) Si ha  $\mathbf{F}_3 = (a\dot{\theta}^2(t) \sin bt, 0, 0)$ .]

**Esercizio 15.** Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muove in senso antiorario lungo l'ellisse di semiassi di lunghezza  $a = 2$  e  $b = 1$  e centro l'origine  $O = (0, 0)$  nel piano  $(x, y)$ , orientata in modo che l'asse maggiore risulti parallelo all'asse  $x$ .

L'asse  $\zeta$  di  $K$  si mantiene sempre parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$  e  $K$  ruota intorno all'asse  $\zeta$  con velocità angolare costante  $\omega$  in senso antiorario. All'istante iniziale  $t = 0$  il punto  $O'$  occupa la posizione  $\mathbf{q}_{O'} = (2, 0, 0)$  e gli assi  $\xi$  e  $\eta$  sono diretti come gli assi  $x$  e  $y$ , rispettivamente.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove lungo l'asse  $\xi$  con legge oraria  $\xi(t) = vt$ , con  $v$  costante positiva.

- (1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , i.e.  $D = C \circ B$ , e determinare  $C$  e  $B$ .
- (2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema assoluto e  $\mathbf{Q}(t)$  nel sistema mobile.
- (3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .
- (4) Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .
- (5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .
- (6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .
- (7) Determinare la forza di Coriolis  $\mathbf{F}_2$  che agisce sul punto  $P$ .

[Soluzione. (1) Risulta  $D = C \circ B$ , dove  $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t), 0)$ , con  $\rho(t) = 2/(\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta(t)})$  e  $\theta(t)$  che rappresenta la legge oraria (non specificata) con cui varia l'angolo che il raggio vettore che individua il punto  $P$  forma con l'asse  $x$ , e  $B = B^3(\omega t)$ , con le notazioni dell'esercizio 3 (2) Si ha  $\mathbf{Q}(t) = (vt, 0, 0)$  e  $\mathbf{q}(t) = (vt \cos \omega t + \rho(t) \cos \theta(t), vt \sin \omega t + \rho(t) \sin \theta(t), 0)$ .

**312** CAPITOLO 8. MOTI RELATIVI E SISTEMI DI RIFERIMENTO

$\rho(t) \sin \theta(t), 0$ ). (3) Si ha  $\mathbf{v} = (v \cos \omega t - v \omega t \sin \omega t + \dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t), v \sin \omega t + v \omega t \cos \omega t + \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t), 0)$ . (4) Si ha  $\mathbf{v}' = (v \cos \omega t, v \sin \omega t, 0)$ . (5) Si ha  $\mathbf{v}_0 = (\dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t), \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t), 0)$ . (6) Si ha  $\mathbf{v}_T = (-v \omega t \sin \omega t, v \omega t \cos \omega t, 0)$ . (7) La forza di Coriolis è data da  $\mathbf{F}_2 = (0, -2\omega v, 0)$ .]

**Esercizio 16.** Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), tale che l'asse  $\zeta$  di  $K$  coincide con l'asse  $z$  di  $\kappa$  e  $K$  ruota intorno all'asse  $\zeta = z$  con velocità angolare costante  $\omega$ . I due sistemi  $\kappa$  e  $K$  coincidono all'istante iniziale  $t = 0$ .

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove lungo l'asse  $\xi$  sottoposto all'azione di una molla con costante elastica  $\lambda^2$  (così che se  $\mathbf{r}$  è lo spostamento di  $P$  rispetto a  $O \equiv O'$  la forza di richiamo è data da  $-\lambda^2 \mathbf{r}$ ). All'istante iniziale  $t = 0$  il punto materiale ha velocità nulla.

(1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , *i.e.*  $D = C \circ B$ , e determinare  $C$  e  $B$ .

(2) Scrivere l'equazione del moto nel sistema di riferimento mobile  $K$ . [Poiché il punto materiale è costretto a muoversi lungo l'asse  $\xi$ , qualsiasi componente della forza  $\mathbf{F}_{TOT}$  non diretta lungo  $\xi$  è bilanciata da una corrispondente forza vincolare (cfr. il capitolo 9) e quindi non interviene nell'equazione del moto, in modo tale che le coordinate del punto materiale  $P$  lungo gli assi  $\eta$  e  $\zeta$  sono identicamente nulle].

(3) Risolvere l'equazione del moto nel sistema  $K$  e determinare la traiettoria  $\mathbf{Q}(t)$  in tale sistema, al variare del parametro  $\omega$ .

(4) Dimostrare che esiste un valore di  $\omega$  per il quale il punto materiale  $P$  risulta fermo nel sistema di riferimento  $K$  per una scelta opportuna dei dati iniziali.

(5) Discutere sotto quali condizioni su  $\omega$  la soluzione  $\mathbf{q}(t)$  descrive un moto periodico nel sistema di riferimento fisso  $\kappa$ .

[*Soluzione.* (1) Risulta  $D = C \circ B$ , dove  $C = \mathbb{1}$ , e  $B = B^3(\theta(t))$ , con le notazioni dell'esercizio 3 e  $\theta(t) = \omega t$ . (2) Si ha  $\mathbf{F}_{TOT} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_V$ , dove  $\mathbf{F} = (-\lambda^2 \xi, 0, 0)$ ,  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{F}_2 = (0, -2\omega \dot{\xi}, 0)$  e  $\mathbf{F}_3 = (\omega^2 \xi, 0, 0)$  e  $\mathbf{F}_V$  è diretta ortogonalmente alla direzione  $\xi$  ed è tale da rendere nulle le componenti lungo le direzioni  $\eta$  e  $\zeta$  della forza totale. Quindi  $\ddot{\xi} = \alpha \xi$ , dove  $\alpha = \omega^2 - \lambda^2$ , mentre  $\eta \equiv 0$  e  $\zeta \equiv 0$ . (3) Se  $\alpha < 0$  si ha  $\xi(t) = \xi_0 \cos \sqrt{-\alpha} t$ ; se  $\alpha > 0$  si ha  $\xi(t) = \xi_0 \cosh \sqrt{\alpha} t$ , dove  $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ ; se  $\alpha = 0$  si ha  $\xi(t) \equiv \xi_0$ . Inoltre  $\eta(t) \equiv 0$  e  $\zeta(t) \equiv 0$ . (4) Per  $\omega = \lambda$  si ha  $\alpha = 0$ , quindi  $\xi(t) = \xi(0)$  purché si abbia  $\dot{\xi}(0) = 0$ . (5) Il moto è periodico nei due casi (5.1)  $\alpha = 0$  e  $\dot{\xi}(0) = 0$ , e (5.2)  $\alpha < 0$ ,  $\lambda > \omega$  e  $\sqrt{\omega^2/(\lambda^2 - \omega^2)} \in \mathbb{Q}$ .]