

## Capitolo 12. Alcuni esempi di sistemi lagrangiani

sec.53

### 53. Stabilità delle configurazioni d'equilibrio

p.53.1 **53.1. Introduzione.** Ricordiamo che, dato uno spazio vettoriale  $X$ , una *forma quadratica* è un'applicazione bilineare simmetrica  $g: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , che associa a ogni coppia di elementi  $x, y \in X$  un numero  $g(x, y)$ . Una forma quadratica si dice *definita positiva* se per ogni  $x \in X$  si ha  $g(x, x) \geq 0$ , e si dice *definita strettamente positiva* se per ogni  $x \in X$  si ha  $g(x, x) > 0$  e il segno uguale vale se e solo se  $x = 0$ .

p.53.2 **53.2. LEMMA.** Se  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$  non dipende esplicitamente dal tempo allora la funzione

$$53.1 \quad E = E(q, \dot{q}) = \left\langle \dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (53.1)$$

è una costante del moto.

p.53.3 **53.3. Dimostrazione del lemma 53.2.** La derivata totale rispetto al tempo di  $E$  è data da

$$53.2 \quad \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \left\langle \ddot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle + \left\langle \dot{q}, \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \\ &= \left\langle \ddot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle + \left\langle \dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right\rangle - \frac{d\mathcal{L}}{dt}, \end{aligned} \quad (53.2)$$

dove si sono utilizzate le equazioni di Eulero-Lagrange (47.11).

D'altra parte, per definizione di derivata totale, si ha

$$53.3 \quad \begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \left\langle \ddot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle + \left\langle \dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \left\langle \ddot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle + \left\langle \dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right\rangle, \end{aligned} \quad (53.3)$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto che  $\mathcal{L}$  non dipende esplicitamente dal tempo (così che la sua derivata parziale rispetto a  $t$  è nulla). Inserendo la (53.3) nella (53.2) otteniamo

$$53.4 \quad \frac{dE}{dt} = 0, \quad (53.4)$$

e quindi segue l'asserto. ■

p.53.4 **53.4. LEMMA.** *Dato un sistema meccanico conservativo sottoposto a vincoli olonomi bilateri autonomi descritto dalle coordinate lagrangiane  $q = (q_1, \dots, q_{3N-M})$ , la corrispondente lagrangiana (vincolata) ha la forma*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= T(q, \dot{q}) - U(q), \\ 53.5 \quad T(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle, \end{aligned} \quad (53.5)$$

dove  $A(q)$  è una matrice simmetrica definita positiva di elementi

$$53.6 \quad A_{mm'}(q) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 m_n \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_m} \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_{m'}}, \quad (53.6)$$

con  $1 \leq m, m' \leq 3N - M$ .

p.53.5 **53.5. Dimostrazione del lemma 53.4.** Scrivendo le coordinate cartesiane  $x$  in termini delle coordinate lagrangiane  $q$  secondo la (49.1), otteniamo per l'energia cinetica l'espressione

$$\begin{aligned} 53.7 \quad T(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 m_n \dot{x}_k^{(n)} \dot{x}_k^{(n)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 m_n \sum_{m=1}^{3N-M} \sum_{m'=1}^{3N-M} \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_m} \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_{m'}} \dot{q}_m \dot{q}_{m'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{3N-M} \sum_{m'=1}^{3N-M} \left( \sum_{n=1}^N m_n \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_m} \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_{m'}} \right) \dot{q}_m \dot{q}_{m'}, \end{aligned} \quad (53.7)$$

dove si sono utilizzate le (49.2), tenendo conto che le derivate parziali rispetto al tempo sono nulle. Segue allora che  $T(q, \dot{q}, t)$  ha la forma in (53.5) se definiamo la matrice  $A(q)$  come in (53.6).

Si vede quindi immediatamente che la matrice  $A(q)$  è simmetrica. Per vedere che è definita positiva notiamo innanzitutto che si ha  $\dot{q} = 0$  se e solo se  $\dot{x} = 0$ . Infatti, in accordo con la (49.2),  $\dot{x}_k^{(n)}$  è una combinazione lineare dei vettori  $\partial x_k^{(n)} / \partial q_m$ . Tali vettori costituiscono una base per lo spazio tangente (cfr. l'esercizio 2 del Capitolo 11), quindi la combinazione lineare (49.2) è nulla se e solo se i coefficienti della combinazione lineare  $\dot{q}_m$  sono tutti simultaneamente nulli: in altre parole si ha  $\dot{x}_k^{(n)} = 0$  se e solo se  $\dot{q}_m = 0$  per ogni  $m = 1, \dots, 3N - M$ .

Quindi  $T(q, \dot{q})$  è nulla se e solo se  $\dot{q} = 0$  ed è strettamente positiva per ogni  $\dot{q} \neq 0$ , poiché la forma quadratica in  $\dot{x}$

$$53.8 \quad \langle \dot{x}, m\dot{x} \rangle = \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle = T(q, \dot{q}) \quad (53.8)$$

è nulla se e solo se  $\dot{x} = 0$  ed è strettamente positiva altrimenti, (si noti che i due prodotti scalari sono il primo in  $\mathbb{R}^{3N}$  e il secondo in  $\mathbb{R}^{3N-M}$ ). ■

*p.53.6* **53.6. LEMMA.** *Se la lagrangiana  $\mathcal{L}$  descrive un sistema meccanico conservativo allora  $E$  rappresenta l'energia totale del sistema.*

*p.53.7* **53.7. Dimostrazione del lemma 53.6.** Se  $\mathcal{L} = T - U$ , con  $T = T(q, \dot{q})$  e  $U = U(q)$  si ha, dalla definizione (53.9),

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle - \mathcal{L} = \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle - \mathcal{L} = 2T(q, \dot{q}) - (T(q, \dot{q}) - U(q)) \\ &= T(q, \dot{q}) + U(q) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + U(q), \end{aligned} \quad (53.9)$$

e quindi  $E$  è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, *i.e.* è l'energia totale del sistema. ■

*p.53.8* **53.8. TEOREMA.** *Dato un sistema meccanico conservativo descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ , le configurazioni d'equilibrio corrispondono ai punti  $q_0$  che rendono stazionaria l'energia potenziale  $U(q)$ . I punti di minimo isolato rappresentano configurazioni d'equilibrio stabile.*

*p.53.9* **53.9. Dimostrazione del lemma 53.8.** Usiamo l'espressione (53.5) per la lagrangiana. Si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_m} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{m'=1}^{3N-M} A_{mm'} \dot{q}_{m'} \right) \\ &= \sum_{m', m''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{mm'}}{\partial q_{m''}} \dot{q}_{m'} \dot{q}_{m''} + \sum_{m'=1}^{3N-M} A_{mm'} \ddot{q}_{m'}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_m} &= \frac{1}{2} \sum_{m', m''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{m'm''}}{\partial q_m} \dot{q}_{m'} \dot{q}_{m''} - \frac{\partial U}{\partial q_m}, \end{aligned} \quad (53.10)$$

così che le equazioni di Eulero-Lagrange dànno

$$\begin{aligned} \sum_{m'=1}^{3N-M} A_{mm'} \ddot{q}_{m'} &= - \sum_{m', m''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{mm'}}{\partial q_{m''}} \dot{q}_{m'} \dot{q}_{m''} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m', m''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{m'm''}}{\partial q_m} \dot{q}_{m'} \dot{q}_{m''} - \frac{\partial U}{\partial q_m}. \end{aligned} \quad (53.11)$$

Se introduciamo il vettore

$$Q_m(q, \dot{q}) = - \sum_{m', m''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{mm'}}{\partial q_{m''}} \dot{q}_{m'} \dot{q}_{m''} + \frac{1}{2} \sum_{m', m''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{m'm''}}{\partial q_m} \dot{q}_{m'} \dot{q}_{m''} - \frac{\partial U}{\partial q_m}, \quad (53.12)$$

42 CAPITOLO 12. ALCUNI ESEMPI DI SISTEMI LAGRANGIANI

e definiamo  $p_m = \dot{q}_m$  per  $i = 1, \dots, 3N - M$ , possiamo trasformare le equazioni del secondo ordine (53.11) in un sistema di  $2(3N - M)$  equazioni del primo ordine, che scriviamo, in maniera compatta,

$$53.13 \quad \begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = A^{-1}(q)\mathcal{Q}(q, p), \end{cases} \quad (53.13)$$

dove si è tenuto conto che la matrice  $A(q)$  si può invertire poiché è definita positiva (cfr. il lemma 53.4).

I punti d'equilibrio per il sistema (53.13) si ottengono imponendo che, in corrispondenza di essi, il campo vettoriale sia nullo. Le prime  $3N - M$  equazioni in (53.13) danno  $p = 0$ , che, inserite nelle ultime  $3N - M$ , richiedono  $\mathcal{Q}(q, 0) = 0$ , e quindi, in base alla definizione (53.12),  $\partial U(q)/\partial q = 0$ . In conclusione si ha una configurazione d'equilibrio per  $\dot{q} = 0$  e  $q = q_0$ , se  $q_0$  è un punto stazionario dell'energia potenziale  $U$ .

Inoltre la (53.9) rappresenta l'energia totale del sistema descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ : possiamo quindi applicare il teorema 18.30 per concludere che i punti di minimo isolati sono punti d'equilibrio stabile per il sistema. ■

*p.53.10* **53.10. Osservazione.** Nel caso di vincoli olonomi bilateri, se ci limitiamo allo studio delle forze vincolari che si esercitano in corrispondenza di una configurazione d'equilibrio, possiamo procedere come segue, studiando direttamente le equazioni (39.6). Se le forze sono conservative allora si ha

$$53.14 \quad \mathbf{f}^{(n)} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(n)}} U(x), \quad (53.14)$$

e quindi le equazioni del moto diventano

$$53.15 \quad m_n \ddot{\mathbf{x}}^{(n)} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(n)}} U(x) + \sum_{m=1}^M \lambda_m \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(n)}} G_m(x, t), \quad (53.15)$$

dove si è tenuto conto dell'ultima equazione in (39.6) che permette di esprimere le forze vincolari in termini dei gradienti delle funzioni che definiscono i vincoli.

Le configurazioni d'equilibrio sono date dai punti  $x \in \Sigma(t)$  in cui si annulla il campo vettoriale: esse corrispondono quindi ai minimi dell'energia potenziale condizionata dai vincoli  $G_m(x(t), t) = 0$ . Si tratta di un problema di minimi vincolati: possiamo perciò applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Notiamo che, alternativamente, si può sempre procedere come indicato nel paragrafo 49.20, imponendo l'ulteriore condizione che si ha  $\ddot{x} = 0$  dato che si tratta di una configurazione d'equilibrio.

*p.53.11* **53.11. Osservazione.** Se un sistema meccanico conservativo è sottoposto a vincoli olonomi bilateri non autonomi allora  $x = x(q, t)$  (invece di  $x = x(q)$  come abbiamo

scritto nel paragrafo §53.5. Quindi l'espressione dell'energia cinetica trovata nel paragrafo §53.5 è modificata dall'aggiunta di altri due termini dovuti alla derivata parziale di  $x$  rispetto a  $t$ . Si ha infatti in tal caso

$$53.16 \quad T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q, t) \dot{q} \rangle + \langle B(q, t), \dot{q} \rangle + C(q, t), \quad (53.16)$$

dove  $A(q, t)$  è ancora una matrice simmetrica definita positiva e

$$53.17 \quad B(q, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial q_m} \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial t}, \quad C(q, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial x_k^{(n)}}{\partial t} \right)^2. \quad (53.17)$$

Quindi  $T(q, \dot{q})$  è ancora quadratica in  $\dot{q}$ . Solo che ora compaiono anche termini lineari e costanti in  $\dot{q}$ .

*p.53.12* **53.12. Osservazione.** Si noti che anche nel caso di vincoli non autonomi discusso nell'osservazione 53.11 si ha

$$53.18 \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = A_{ij}(q, t), \quad (53.18)$$

che è quindi una matrice invertibile.

*sec.54*

## 54. Variabili cicliche e metodo di Routh

*p.54.1* **54.1. Introduzione.** Lo studio di un sistema di lagrangiano può risultare più o meno complicato a seconda del sistema di coordinate che si è scelto. La fondatezza di questa semplice osservazione è già evidente nel caso di sistemi lineari  $\dot{x} = Ax$ : se per esempio la matrice  $A$  è diagonalizzabile, è conveniente studiare il sistema nella base in cui  $A$  è diagonale. In questo paragrafo vedremo che è particolarmente vantaggioso lavorare in un sistema di coordinate in cui la lagrangiana non dipenda esplicitamente da (almeno) una di esse. Questo infatti consentirà di passare a un sistema lagrangiano con un grado di libertà in meno, e quindi, in principio, più facile da studiare. La riduzione al sistema con meno gradi di libertà si ottiene attraverso quello che è chiamato *metodo di Routh*, che ora passiamo a descrivere.

*p.54.2* **54.2. Notazioni.** Sia  $\mathcal{L} = T - U$  una lagrangiana descritta in un sistema di coordinate  $q_1, \dots, q_N$ . Per un sistema meccanico soggetto a forze conservative potremo scrivere

$$54.1 \quad \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t). \quad (54.1)$$

dove  $T$  è l'energia cinetica e  $U$  è l'energia potenziale.

44 CAPITOLO 12. ALCUNI ESEMPI DI SISTEMI LAGRANGIANI

Supponiamo (anche nel seguito) che sia

$$54.2 \quad \det \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0, \quad (54.2)$$

*i.e.* la matrice  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$  sia invertibile. Più in generale possiamo supporre che la matrice  $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j$  sia definita positiva (cfr. l'osservazione 47.28 e il teorema 53.4); questo in particolare implica la disuguaglianza  $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q}_N^2 \neq 0$  (cfr. l'esercizio 3) che rientra nelle ipotesi del teorema 54.7.

*p.54.3* **54.3. DEFINIZIONE (VARIABILE CICLICA).** *Se la lagrangiana  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$  non dipende da una delle coordinate, diremo che tale coordinata è una variabile ciclica.*

*p.54.4* **54.4. Osservazione.** Si noti che il fatto che la lagrangiana di un sistema a  $N$  gradi di libertà possa dipendere da un numero di coordinate inferiore a  $N$  dipende dal particolare sistema di coordinate scelte. Per esempio nel caso di potenziali centrali, se si scelgono coordinate polari  $(\rho, \theta, \varphi)$  allora le variabili angolari  $(\theta, \varphi)$  sono cicliche (cfr. l'esempio 54.11 più avanti); tuttavia in coordinate cartesiane nessuna variabile è ciclica. Vedremo tuttavia nel paragrafo §57 che l'esistenza di coordinate cicliche è legata all'esistenza di costanti del moto e che, in particolare, se un sistema meccanico ammette una costante del moto, allora esiste un sistema di coordinate in cui una di esse è ciclica.

*p.54.5* **54.5. LEMMA.** *Se  $q_N$  è una variabile ciclica per il sistema descritto dalla lagrangiana  $\mathcal{L}$ , i.e.*

$$54.3 \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t), \quad (54.3)$$

*allora la quantità*

$$54.4 \quad p_N \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_N} \quad (54.4)$$

*è una costante del moto.*

*p.54.6* **54.6. Dimostrazione del lemma 54.5.** Segue dalle equazioni di Eulero-Lagrange (47.11) e dal fatto che  $\mathcal{L}$  non dipende da  $q_N$  (cfr. la (54.3)). ■

*p.54.7* **54.7. TEOREMA (ROUTH).** *Se un sistema lagrangiano con lagrangiana  $\mathcal{L}$  è tale che*  
 (1)  $q_N$  sia una variabile ciclica nel sistema di coordinate  $q = (q_1, \dots, q_N)$ , e  
 (2)  $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q}_N^2 \neq 0$ ,

*allora l'evoluzione delle altre coordinate è determinata dalla lagrangiana*

$$54.5 \quad \mathcal{L}_R(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}, t, p_N) = [\mathcal{L}(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) - p_N \dot{q}_N]_{\dot{q}_N = f(q_1, \dots, q_{N-1}, t, p_N)}, \quad (54.5)$$

*dove  $p_N$  è la costante del moto (54.4) e la funzione  $f$  si ottiene invertendo la (54.4), i.e. esprimendo  $\dot{q}_N$  in funzione di  $p_N$  e delle altre variabili.*

*p.54.8* **54.8. Dimostrazione del teorema 54.7.** Poiché  $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q}_N^2 \neq 0$ , la (54.4) può essere effettivamente invertita (per il teorema della funzione implicita; cfr. l'esercizio 9 del

Capitolo 4), e quindi esiste una funzione  $f$  tale che

$$54.6 \quad \dot{q}_N = f(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}, t, p_N), \quad (54.6)$$

dove  $p_N$  è una costante del moto (per il lemma 54.4). Quindi  $\dot{q}_N$  è funzione delle sole coordinate  $q_1, \dots, q_{N-1}$  (e delle loro derivate, oltre che di  $t$  e di  $p_N$ ) e non dipende da  $q_N$ . Quindi, una volta che le funzioni  $t \rightarrow q_1(t), \dots, t \rightarrow q_{N-1}(t)$  siano note, la funzione  $t \rightarrow q_N(t)$  si ottiene per integrazione diretta dalla (54.6).

Dobbiamo quindi determinare la variazione nel tempo delle prime  $N-1$  coordinate.

Definiamo allora la funzione  $\mathcal{L}_R$  come in (54.5); per costruzione  $\mathcal{L}_R$  dipende solo da

$$54.7 \quad q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}, t, p_N, \quad (54.7)$$

quindi con il simbolo  $\partial \mathcal{L}_R / \partial q_i$  indichiamo la derivata parziale di  $\mathcal{L}_R$  che si ottiene come limite del rapporto incrementale che si ha mantenendo fisse le altre variabili da cui essa dipende (inclusa  $p_N$ , che deve essere considerata semplicemente un parametro per  $\mathcal{L}_R$ ). Quindi, per  $k = 1, \dots, N-1$ ,

$$54.8 \quad \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_N} \frac{\partial f}{\partial q_k} - p_N \frac{\partial f}{\partial q_k} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}, \quad (54.8)$$

in virtù della definizione (54.4).

Analogamente, per  $k = 1, \dots, N-1$ ,

$$54.9 \quad \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_N} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_k} - p_N \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_k} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}, \quad (54.9)$$

e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange (47.11) per la lagrangiana  $\mathcal{L}$  implicano

$$54.10 \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (54.10)$$

che sono le equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana (54.5). ■

*p.54.9* **54.9. DEFINIZIONE (LAGRANGIANA RIDOTTA).** Dato un sistema lagrangiano e un sistema di coordinate in cui la coordinata  $q_N$  sia ciclica, definiremo lagrangiana ridotta la funzione (54.5).

*p.54.10* **54.10. Osservazione.** La dimostrazione del teorema 54.7 mostra che la sostituzione diretta della (54.6) nella lagrangiana  $\mathcal{L}$ , *i.e.*

$$54.11 \quad \begin{aligned} & \mathcal{L}'(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}, t, p_N) \\ &= [\mathcal{L}(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t)]_{\dot{q}_N=f(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}, t, p_N)} \end{aligned} \quad (54.11)$$

produce una funzione  $\mathcal{L}'$  che non rappresenta la lagrangiana del sistema ridotto (*i.e.* del sistema a  $N-1$  gradi di libertà descritto dalle coordinate  $q_1, \dots, q_{N-1}$ ).

Questo è dovuto al fatto che le derivate parziali rispetto alle  $q_k$  e rispetto alle  $\dot{q}_k$  entrano in modo diverso nelle equazioni di Eulero-Lagrange, a seconda di quali siano le altre coordinate che si mantengono costanti nel calcolare le derivate parziali.

*p.54.11* **54.11.** ESEMPIO. Sia  $\mathcal{L}$  la lagrangiana che descrive un punto di massa  $m$  che si muove in un piano per effetto di una forza centrale di energia potenziale  $U$  (cfr. la discussione del problema dei due corpi al Capitolo 7). Quindi, in coordinate polari (cfr. l'esercizio 1),

$$54.12 \quad \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - U(\rho) \quad (54.12)$$

e la coordinata  $\theta$  è ciclica. Quindi la quantità

$$54.13 \quad L \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2 \dot{\theta}, \quad (54.13)$$

è una costante del moto (momento angolare); cfr. anche il paragrafo §30. Per il teorema 54.7 il moto della coordinata  $\rho$  è determinato dalla lagrangiana ridotta

$$54.14 \quad \mathcal{L}_R(\rho, \dot{\rho}) = [\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) - L\dot{\theta}]_{\dot{\theta}=L/(m\rho^2)} = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 - \left( U(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} \right), \quad (54.14)$$

mentre la sostituzione della (54.13) nella (54.12) avrebbe portato alla funzione

$$54.15 \quad \mathcal{L}' = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 - \left( U(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} \right), \quad (54.15)$$

che non rappresenta la lagrangiana che descrive il moto.

*sec.55*

## 55. Un esempio di sistema lagrangiano

*p.55.1* **55.1. Introduzione.** Vediamo un'applicazione della teoria dei sistemi lagrangiani sviluppata finora.

*p.55.2* **55.2. ESEMPIO.** Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m$ , sono vincolati a muoversi su una guida circolare di raggio  $r = 1$  posta in un piano verticale  $\pi$ . Si scelga in  $\pi$  un sistema di coordinate  $(x, y)$  nel quale la circonferenza abbia equazione

$$55.1 \quad x^2 + (y - 1)^2 = 1. \quad (55.1)$$

Due punti materiali  $P_3$  e  $P_4$ , anch'essi di massa  $m$ , possono scorrere lungo una guida orizzontale contenuta nel piano  $\pi$ , di equazione  $y = 0$ .

I punti  $P_1$  e  $P_2$  sono collegati tramite una molla, rispettivamente, ai punti  $P_3$  e  $P_4$ , i quali, a loro volta, sono collegati tramite una molla allo stesso punto materiale  $P_5$ ,



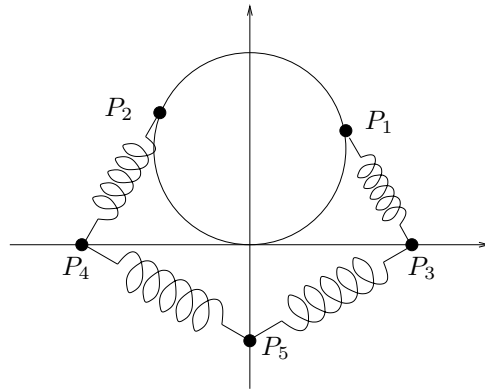


FIGURA 55.1. Sistema discusso nell'esempio 55.2.

di massa  $m$ , libero di scorrere lungo l'asse  $y$ ; le molle hanno tutte lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k > 0$ . Cfr. la figura 55.1.

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane non banali dei punti  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$  e gli angoli che i raggi vettori  $OP_1$  e  $OP_2$  formano con la verticale discendente (se  $O$  è il centro della guida circolare).
- (2) Determinare le posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3) Si consideri la configurazione (cfr. la figura 55.2)

55.2

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (1, 1), & P_2 &= (-1, 1), & P_3 &= (1, 0), \\
 P_4 &= (-1, 0), & P_5 &= (0, -mg/2k), \\
 \mathbf{v}_1 &= (0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (0, 0), & \mathbf{v}_3 &= (0, 0), \\
 \mathbf{v}_4 &= (0, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, 0),
 \end{aligned}
 \tag{55.2}$$

dove  $\mathbf{v}_i$  è la velocità del punto  $P_i$ : determinare le forze vincolari che agiscono sul punto  $P_3$ .

(4) Se i punti  $P_1$  e  $P_2$  sono fissati rigidamente nelle configurazioni, rispettivamente,  $P_1 = (1, 1)$  e  $P_2 = (-1, 1)$  e il piano  $\pi$  ruota intorno all'asse  $y$  con velocità angolare costante  $\omega$  (cfr. la figura 55.3), determinare le posizioni d'equilibrio relativo (*i.e.* le posizioni d'equilibrio nel sistema di riferimento solidale con il piano  $\pi$ ) e studiarne la stabilità.

(5) Sotto le stesse ipotesi del punto precedente, determinare le forze vincolari che agiscono sul punto  $P_3$ , in corrispondenza di una generica configurazione compatibile con il moto.

p.55.3

**55.3.** *Lagrangiana ed equazioni di Eulero-Lagrange.* In termini delle coordinate lagrangiane suggerite nel testo, le coordinate cartesiane dei punti  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$

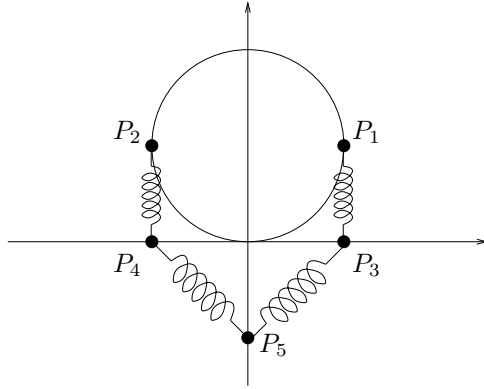


FIGURA 55.2. Configurazione considerata al punto (3) dell'esempio 55.2.

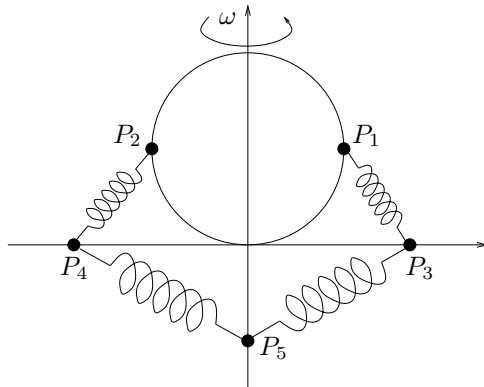


FIGURA 55.3. Sistema considerato al punto (4) dell'esempio 55.2.

sono date da

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (\sin \theta_1, 1 - \cos \theta_1), & P_2 &= (\sin \theta_2, 1 - \cos \theta_2), \\
 P_3 &= (x_1, 0), & P_4 &= (x_2, 0), & P_5 &= (0, y).
 \end{aligned}
 \tag{55.3}$$

Le corrispondenti velocità sono quindi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_1 &= (\cos \theta_1 \dot{\theta}_1, \sin \theta_1 \dot{\theta}_1), & \mathbf{v}_2 &= (\cos \theta_2 \dot{\theta}_2, \sin \theta_2 \dot{\theta}_2), \\
 \mathbf{v}_3 &= (\dot{x}_1, 0), & \mathbf{v}_4 &= (\dot{x}_2, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, \dot{y}).
 \end{aligned}
 \tag{55.4}$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}^2)
 \tag{55.5}$$

e l'energia potenziale è

$$\begin{aligned}
 U &= mg(1 - \cos \theta_1) + mg(1 - \cos \theta_2) + mgy \\
 55.6 \quad &+ \frac{k}{2} \{ [(\sin \theta_1 - x_1)^2 + (1 - \cos \theta_1)^2] + [(\sin \theta_2 - x_2)^2 + (1 - \cos \theta_2)^2] \\
 &+ [x_1^2 + y^2] + [x_2^2 + y^2] \} \quad (55.6)
 \end{aligned}$$

che si può riscrivere, trascurando i termini costanti,

$$\begin{aligned}
 55.7 \quad U &= mg(y - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\
 &+ k(x_1^2 + x_2^2 + y^2 - x_1 \sin \theta_1 - \cos \theta_1 - x_2 \sin \theta_2 - \cos \theta_2). \quad (55.7)
 \end{aligned}$$

Quindi la lagrangiana del sistema è data da

$$\begin{aligned}
 55.8 \quad \mathcal{L} &= T - U = \frac{m}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}^2) \\
 &- mg(y - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (55.8) \\
 &- k(x_1^2 + x_2^2 + y^2 - x_1 \sin \theta_1 - \cos \theta_1 - x_2 \sin \theta_2 - \cos \theta_2).
 \end{aligned}$$

Per ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange, si calcolano le derivate parziali  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$  e  $\partial \mathcal{L} / \partial q$  e si pone  $d/dt[\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}] = \partial \mathcal{L} / \partial q$ , se  $q$  denota la generica coordinata lagrangiana. Si ha

$$\begin{aligned}
 55.9 \quad &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = m\dot{\theta}_1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m\dot{\theta}_2, \\
 &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \\
 &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -mg \sin \theta_1 + kx_1 \cos \theta_1 - k \sin \theta_1, \\
 &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -mg \sin \theta_2 + kx_2 \cos \theta_2 - k \sin \theta_2, \\
 &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -2kx_1 + k \sin \theta_1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -2kx_2 + k \sin \theta_2, \\
 &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2ky - mg, \quad (55.9)
 \end{aligned}$$

e se ne deduce quindi

$$55.10 \quad \begin{cases} m\ddot{\theta}_1 = -mg \sin \theta_1 + kx_1 \cos \theta_1 - k \sin \theta_1, \\ m\ddot{\theta}_2 = -mg \sin \theta_2 + kx_2 \cos \theta_2 - k \sin \theta_2, \\ m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k \sin \theta_1, \\ m\ddot{x}_2 = -2kx_2 + k \sin \theta_2, \\ m\ddot{y} = -2ky - mg. \end{cases} \quad (55.10)$$

p.55.4 **55.4.** *Configurazioni d'equilibrio.* I punti d'equilibrio sono i punti stazionari del potenziale. Si devono quindi trovare i valori  $(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, y)$  tali che siano nulle le derivate del potenziale  $U$ . Imponiamo perciò:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial \theta_1} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = mg \sin \theta_1 - kx_1 \cos \theta_1 + k \sin \theta_1 = 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial \theta_2} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = mg \sin \theta_2 - kx_2 \cos \theta_2 + k \sin \theta_2 = 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2kx_1 - k \sin \theta_1 = 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2kx_2 - k \sin \theta_2 = 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2ky + mg = 0.
 \end{aligned}
 \tag{55.11}$$

L'ultima equazione dà

$$y = -\frac{mg}{2k} \equiv -y_0,
 \tag{55.12}$$

mentre dalla terza e dalla quarta si ricavano le relazioni

$$2x_1 = \sin \theta_1, \quad 2x_2 = \sin \theta_2,
 \tag{55.13}$$

che, introdotte nelle prime due equazioni, danno due equazioni chiuse, rispettivamente per  $\theta_1$  e per  $\theta_2$ . Le due equazioni sono uguali, a meno dello scambio di  $\theta_1$  con  $\theta_2$ : è quindi sufficiente studiarne una. Consideriamo, per esempio, l'equazione per  $\theta_1$ :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \frac{\sin \theta_1}{2} [2(mg + k) - k \cos \theta_1] = 0
 \tag{55.14}$$

che, per essere soddisfatta, richiede  $\sin \theta_1 = 0$ , dal momento che l'equazione

$$\cos \theta_1 = \frac{2(mg + k)}{k}
 \tag{55.15}$$

non ammette soluzione poiché  $2mg + k > k$ , mentre  $|\cos \theta_1| \leq 1$ .

Quindi saranno possibili solo le soluzioni  $\sin \theta_1 = 0$ , che implicano  $\theta_1 = 0$  oppure  $\theta_1 = \pi$ . Analogamente la condizione di annullamento per la derivata di  $U$  rispetto a  $\theta_2$  porta a  $\theta_2 = 0$  oppure  $\theta_2 = \pi$ .

In conclusione abbiamo quattro configurazioni d'equilibrio:

$$\begin{aligned}
 (Q_1) \quad & \theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad y = -y_0, \\
 (Q_3) \quad & \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad y = -y_0, \\
 (Q_3) \quad & \theta_1 = \pi, \theta_2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad y = -y_0, \\
 (Q_4) \quad & \theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad y = -y_0,
 \end{aligned}
 \tag{55.16}$$

che corrispondono ad avere il punto  $P_5$  alla quota  $-y_0$ , i punti  $P_3$  e  $P_4$  nell'origine, mentre ciascuno dei i punti  $P_1$  e  $P_2$  può trovarsi o nell'origine o nel punto antipodale all'origine lungo la circonferenza.

p.55.5 **55.5.** *Stabilità delle configurazioni di equilibrio.* Per discutere la stabilità delle posizioni d'equilibrio trovate occorre studiare la matrice hessiana. Il sistema sotto studio è un sistema a 5 gradi di libertà. È tuttavia immediato notare che la lagrangiana si separa nella somma di tre lagrangiane indipendenti

$$55.17 \quad \begin{aligned} \mathcal{L} &\equiv \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, y, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}) \\ &= \mathcal{L}_1(\theta_1, x_1, \dot{\theta}_1, \dot{x}_1) + \mathcal{L}_2(\theta_2, x_2, \dot{\theta}_2, \dot{x}_2) + \mathcal{L}_3(y, \dot{y}), \end{aligned} \quad (55.17)$$

dove

$$55.18 \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= T_1 - U_1 = \frac{m}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{x}_1^2) + mg \cos \theta_1 - k(x_1^2 - x_1 \sin \theta_1 - \cos \theta_1), \\ \mathcal{L}_2 &= T_2 - U_2 = \frac{m}{2}(\dot{\theta}_2^2 + \dot{x}_2^2) + mg \cos \theta_2 - k(x_2^2 - x_2 \sin \theta_2 - \cos \theta_2), \\ \mathcal{L}_3 &= T_3 - U_3 = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy - ky^2, \end{aligned} \quad (55.18)$$

con ovvio significato dei simboli.

Quindi è sufficiente studiare i tre sistemi disaccoppiati così ottenuti e trovare i corrispondenti punti d'equilibrio stabili e instabili. Inoltre, visto che la lagrangiana  $\mathcal{L}_2$  si ottiene semplicemente da  $\mathcal{L}_1$  per scambio di  $(\theta_1, x_1)$  con  $(\theta_2, x_2)$ , basta studiare le lagrangiane  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_3$ .

Per  $\mathcal{L}_3$  si ottiene

$$55.19 \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} = 2k > 0, \quad (55.19)$$

da cui possiamo concludere che il punto  $y = y_0$  è un punto di minimo per il potenziale e quindi  $(y, \dot{y}) = (y_0, 0)$  è una posizione d'equilibrio stabile per  $\mathcal{L}_3$ .

Per  $\mathcal{L}_1$  si ottiene

$$55.20 \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_{11}(\theta_1, x_1) &\equiv \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta_1^2} = mg \cos \theta_1 + k \cos \theta_1 + kx_1 \sin \theta_1, \\ \mathcal{H}_{12}(\theta_1, x_1) &\equiv \mathcal{H}_{21}(\theta_1, x_1) = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta_1 \partial x_1} = -k \cos \theta_1, \\ \mathcal{H}_{22}(\theta_1, x_1) &\equiv \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} = 2k, \end{aligned} \quad (55.20)$$

e quindi la matrice hessiana corrispondente è

$$55.21 \quad \mathcal{H}(\theta_1, x_1) = \begin{pmatrix} mg \cos \theta_1 + k \cos \theta_1 + kx_1 \sin \theta_1 & -k \cos \theta_1 \\ -k \cos \theta_1 & 2k \end{pmatrix}. \quad (55.21)$$

52 CAPITOLO 12. ALCUNI ESEMPI DI SISTEMI LAGRANGIANI

Ne segue che

$$55.22 \quad \mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} mg + k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}, \quad (55.22)$$

così che

$$55.23 \quad \det \mathcal{H}(0, 0) = 2mgk + k^2 > 0, \quad \mathcal{H}_{11}(0, 0) = mg + k > 0, \quad (55.23)$$

quindi  $(\theta_1, x_1) = (0, 0)$  è un punto di minimo per il potenziale. Allo stesso modo

$$55.24 \quad \mathcal{H}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} -mg - k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}, \quad (55.24)$$

così che

$$55.25 \quad \det \mathcal{H}(\pi, 0) = -2mgk - 3k^2 < 0, \quad (55.25)$$

quindi  $(\theta_1, x_1) = (\pi, 0)$  è un punto di sella per il potenziale.

Ragionando analogamente per  $\mathcal{L}_2$  si trova che l'unica configurazione d'equilibrio stabile per  $\mathcal{L}$  è quella in cui ognuno dei tre sistemi lagrangiani  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{L}_3$  ammette posizioni d'equilibrio stabile, *i.e.*

$$55.26 \quad (Q_1) \quad (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (0, 0, 0, 0, y_0), \quad y_0 = -\frac{mg}{2k}, \quad (55.26)$$

mentre le altre possibili configurazioni d'equilibrio

$$55.27 \quad \begin{aligned} (Q_2) \quad & (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (\pi, 0, 0, 0, y_0), & y_0 &= -\frac{mg}{2k}, \\ (Q_3) \quad & (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (0, 0, \pi, 0, y_0), & y_0 &= -\frac{mg}{2k}, \\ (Q_4) \quad & (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (\pi, 0, \pi, 0, y_0), & y_0 &= -\frac{mg}{2k} \end{aligned} \quad (55.27)$$

sono instabili.

p.55.6 **55.6.** *Determinazione delle forze vincolari. Caso I.* Nella configurazione (55.2), per trovare le forze vincolari che agiscono sul punto  $P_3 = (x_3, y_3)$ , si considerano le equazioni

$$55.28 \quad \begin{cases} m\ddot{x}_3 = f_x^{(3)} + R_x^{(3)}, \\ m\ddot{y}_3 = f_y^{(3)} + R_y^{(3)}, \end{cases} \quad (55.28)$$

dove, tenendo conto del vincolo (cfr. le (55.3)), si ha  $P_3 = (x_3, y_3) = (x_1, 0)$ . Quindi

$$55.29 \quad \begin{aligned} m\ddot{x}_3 &= m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k \sin \theta_1, \\ m\ddot{y}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (55.29)$$

Per il principio di d'Alembert si deve inoltre avere

$$55.30 \quad \mathbf{f}_V = \mathbf{R}^{(3)} \equiv (R_x^{(3)}, R_y^{(3)}) = (0, R_y^{(3)}). \quad (55.30)$$

In termini delle coordinate lagrangiane (55.3) la configurazione (55.2) è individuata da

$$55.31 \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad y = y_0, \quad (55.31)$$

corrispondente alla situazione rappresentata in 55.2.

Per calcolare le forze che agiscono sul punto  $P_3$  in tale configurazione, occorre considerare le forze attive  $\mathbf{f}^{(3)} = (f_x^{(3)}, f_y^{(3)})$  in (55.28). Si ha

$$55.32 \quad \begin{aligned} f_x^{(3)} &= -kx_3 = -k, \\ f_y^{(3)} &= ky_0 + k - mg = -\frac{mg}{2} + k - mg = k - \frac{3mg}{2}. \end{aligned} \quad (55.32)$$

Sempre nella configurazione considerata si ha

$$55.33 \quad m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k \sin \theta_1 = -2k + k = -k, \quad (55.33)$$

così che risulta

$$55.34 \quad R_x^{(3)} = -f_x^{(3)} + m\ddot{x}_3 = -f_x^{(3)} + m\ddot{x}_1 = k - k = 0, \quad (55.34)$$

che era ovvio a priori, come già anticipato, e

$$55.35 \quad R_y^{(3)} = -f_y^{(3)} + m\ddot{y}_3 = \frac{3mg}{2} - k, \quad (55.35)$$

che dunque esprime la forza vincolare sul punto  $P_3$ .

Alternativamente si poteva calcolare la forza attiva sul punto  $P_3$  considerando il potenziale

$$55.36 \quad \begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k [(1 - x_3)^2 + (1 - y_3)^2 + x_3^2 + (y_3 - y_0)^2] \\ &+ mgy_3 + \text{termini indipendenti da } x_3, y_3, \end{aligned} \quad (55.36)$$

e ottenendo la forza come gradiente, cambiato di segno, di  $U$ , calcolato in  $(x_3, y_3) = (1, 0)$ . Quindi

$$55.37 \quad \begin{aligned} F_x^{(3)} &= -\frac{\partial U}{\partial x_3} = k [-(1 - x_3) - x_3], \\ F_y^{(3)} &= -\frac{\partial U}{\partial y_3} = k [-(1 - y_3) - (y_3 - y_0)] - mg, \end{aligned} \quad (55.37)$$

che, calcolato in  $(x_3, y_3) = (1, 0)$  dà ovviamente il risultato precedente (55.32).

p.55.7 **55.7. Piano rotante.** Se i punti  $P_1$  e  $P_2$  sono fissati come indicato al punto (4) del paragrafo §55.3, poiché si può tener conto della forza centrifuga che agisce sui punti  $P_3$  e  $P_4$  attraverso l'introduzione di un potenziale (cfr. l'esercizio 4)

$$55.38 \quad U_0 = -\frac{1}{2}m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2), \quad (55.38)$$

54 CAPITOLO 12. ALCUNI ESEMPI DI SISTEMI LAGRANGIANI

la lagrangiana che descrive il sistema diventa

$$55.39 \quad \begin{aligned} \mathcal{L} &= T - U \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}^2) - [mgy + k(x_1^2 + x_2^2 + y^2 - x_1 + x_2) + U_0], \end{aligned} \quad (55.39)$$

così che si può scrivere

$$55.40 \quad \mathcal{L}(x_1, x_2, y, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}) = \mathcal{L}_1(x_1, \dot{x}_1) + \mathcal{L}_2(x_2, \dot{x}_2) + \mathcal{L}_3(y, \dot{y}), \quad (55.40)$$

dove

$$55.41 \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_1(x_1, \dot{x}_1) &= \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 - kx_1^2 + kx_1 + \frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2, \\ \mathcal{L}_2(x_2, \dot{x}_2) &= \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - kx_2^2 - kx_2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x_2^2, \\ \mathcal{L}_3(y, \dot{y}) &= \frac{m}{2} \dot{y}^2 - mgy - ky^2, \end{aligned} \quad (55.41)$$

Le posizioni d'equilibrio sono quindi date dalle soluzioni del sistema di equazioni

$$55.42 \quad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 2kx_1 - k - m\omega^2 x_1 = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= 2kx_2 + k - m\omega^2 x_2 = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 2ky + mg = 0; \end{aligned} \quad (55.42)$$

si ha quindi una sola posizione d'equilibrio, data da

$$55.43 \quad (Q) \quad x_1 = \frac{k}{\alpha}, \quad x_2 = -\frac{k}{\alpha}, \quad y = y_0 = -\frac{mg}{2k}, \quad (55.43)$$

purché

$$55.44 \quad \alpha = 2k - m\omega^2 \neq 0. \quad (55.44)$$

Per discutere la stabilità occorre considerare le derivate seconde dell'energia potenziale dei tre sistemi lagrangiani indipendenti ottenuti. Si ha, rispettivamente,

$$55.45 \quad \begin{aligned} \frac{\partial U^2}{\partial x_1^2} &= 2k - m\omega^2, \\ \frac{\partial U^2}{\partial x_2^2} &= 2k - m\omega^2, \\ \frac{\partial U^2}{\partial y^2} &= 2k > 0, \end{aligned} \quad (55.45)$$

da cui si vede che la posizione d'equilibrio trovata è stabile se  $\alpha > 0$ , *i.e.* se  $2k > m\omega^2$ , e instabile se  $\alpha < 0$ , *i.e.* se  $2k < m\omega^2$ .



Il caso  $\alpha = 0$  va discusso a parte. Se  $\alpha = 0$ , si vede che l'energia potenziale diventa

$$55.46 \quad U = -kx_1 + kx_2 + mgy + ky^2, \quad (55.46)$$

e quindi  $\partial U/\partial x_1 = -k$  e  $\partial U/\partial x_2 = k$ , così che il sistema non ammette alcuna posizione d'equilibrio.

In conclusione, per  $\alpha < 0$  esiste la posizione d'equilibrio instabile ( $Q$ ), per  $\alpha = 0$  non esistono posizioni d'equilibrio e per  $\alpha > 0$  esiste la posizione d'equilibrio stabile ( $Q$ ).

*p.55.8* **55.8.** *Determinazione delle forze vincolari. Caso II.* Per determinare le forze vincolari che agiscono sul punto  $P_3$ , si considera, come nel paragrafo §55.6,

$$55.47 \quad \begin{cases} m\ddot{x}_3 = f_x^{(3)} + R_x^{(3)}, \\ m\ddot{y}_3 = f_y^{(3)} + R_y^{(3)}, \end{cases} \quad (55.47)$$

dove, tenendo conto del vincolo, si ha  $P_3 = (x_3, y_3) = (x_1, 0)$ , con le notazioni (5.3).

Quello che cambia rispetto al caso precedente è che la forza ha ora anche un contributo  $m\omega^2 x_3$  alla componente orizzontale (lungo l'asse  $x$ ) dovuto alla forza centrifuga e la posizione del punto  $P_3$  non è fissata a  $y_0$ . Poiché per il principio di d'Alembert la forza vincolare deve essere ortogonale al vincolo e la componente della forza nella direzione verticale non è modificata dalla forza centrifuga possiamo concludere che, nella configurazione che stiamo considerando, la forza vincolare si calcola esattamente come nel paragrafo §55.6.

Se inoltre notiamo che la componente  $f_y^{(3)}$  della forza non dipende dalla posizione  $x_3$ , otteniamo che la forza vincolare è, per ogni valore di  $x_3$ , data da

$$55.48 \quad \mathbf{R}^{(3)} = (R_x^{(3)}, R_y^{(3)}) = (0, k - ky - mg). \quad (55.48)$$

Questo in ogni caso si può verificare esplicitamente notando che

$$55.49 \quad \begin{cases} m\ddot{x}_3 = m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k + m\omega^2 x_1, \\ m\ddot{y}_3 = 0, \end{cases} \quad (55.49)$$

mentre, per le forze attive, abbiamo

$$55.50 \quad \begin{aligned} f_x^{(3)} &= -kx_3 + m\omega^2 x_3 - k(x_3 - 1) = -2kx_3 + m\omega^2 x_3 + k, \\ f_y^{(3)} &= -ky + k - mg, \end{aligned} \quad (55.50)$$

così che si vede che il valore di  $f_x^{(3)}$  dipende da  $x_3$  ma non contribuisce alla forza vincolare, poiché  $f_x^{(3)} = m\ddot{x}_3$ , mentre

$$55.51 \quad R_y^{(3)} = -f_y^{(3)} + m\ddot{y}_3 = mg - k + ky, \quad (55.51)$$

che è indipendente da  $x_3$ .

sec.56

## 56. Un altro esempio di sistema lagrangiano

### p.56.1 56.1. Introduzione.

p.56.2 **56.2. ESEMPIO.** Un sistema meccanico conservativo è costituito da quattro punti materiali  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$ , tutti di massa  $m$ , disposti in corrispondenza dei quattro vertici di un quadrato di lato  $\ell = 1$ . Il quadrato è vincolato a muoversi in un piano verticale  $\pi$ .

(1) Nel caso in cui il quadrato sia libero di muoversi nel piano sottoposto alla sola forza peso (sia  $g$  la costante di gravità), scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Discutere l'esistenza di eventuali posizioni d'equilibrio.

(2) Nel caso in cui il punto  $P_1$  sia fissato a un punto  $O$  e il piano  $\pi$  ruoti intorno alla verticale passante per  $O$  con velocità angolare  $\omega$ , scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange [Si consideri come coordinata lagrangiana l'angolo che il lato che connette  $P_1$  con il punto  $P_2$  consecutivo sul quadrato forma con la verticale discendente; cfr. la figura 56.1.]

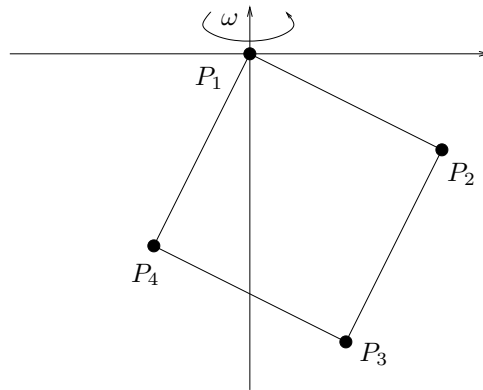


FIGURA 56.1. Sistema considerato al punto (2) dell'esempio 56.2.

(3) Nel caso del punto (2), determinare le posizioni d'equilibrio relativo (i.e. le posizioni d'equilibrio nel piano solidale con il piano rotante) e discuterne la stabilità.

(4) Sempre nel caso in cui il punto  $P_1$  sia fisso in  $O$  e il piano ruoti intorno alla verticale per  $O$  con velocità angolare costante  $\omega$ , si immagini ora che i punti  $P_2$  e  $P_4$  (connessi a  $P_1$  da due lati del quadrato) siano collegati tramite una molla di lunghezza

a riposo nulla e massa trascurabile a un punto  $P_0$ , anch'esso di massa  $m$ , vincolato a muoversi lungo la verticale passante per  $P_1$ ; cfr. la figura 56.2. Scrivere la lagrangiana e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema così modificato. [Si considerino come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  che il lato che connette  $P_1$  con il punto  $P_2$  consecutivo sul quadrato forma con la verticale discendente e l'ordinata  $y$  del punto  $P_0$ .]

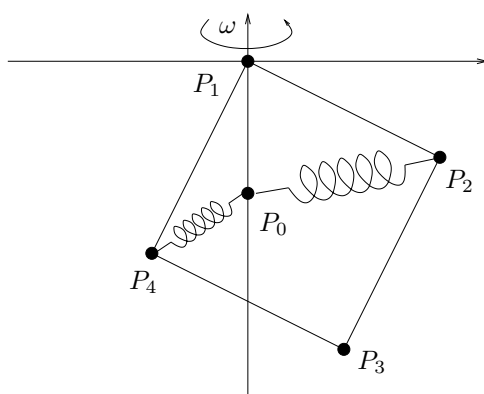


FIGURA 56.2. Sistema considerato al punto (4) dell'esempio 56.2.

(5) Nel caso del punto (4) si verifichi che, per valori dei parametri  $m = k = g = \omega = 1$ , la posizione  $(Q_1)$ , definita da

56.1 
$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad y = -\frac{mg}{2k} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (56.1)$$

è una posizione d'equilibrio stabile. Determinare le forze vincolari che agiscono sul punto  $P_0$ , in corrispondenza di tale configurazione d'equilibrio.

(6) Nel caso del punto (2) discutere qualitativamente il moto nel piano  $(\theta, \dot{\theta})$ , a seconda dei valori dei parametri. In particolare determinare i dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.

p.56.3 **56.3. Quadrato libero.** Se il sistema è libero, possiamo scrivere l'energia cinetica, utilizzando il teorema 37.4 (teorema di König), nella forma

56.2 
$$T = \frac{1}{2}(4m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \quad (56.2)$$

dove  $(x, y)$  sono le coordinate del centro d'inerzia  $C$ , che si troverà al centro del quadrato (*i.e.* all'intersezione delle due diagonali principali) e  $I$  è il momento d'inerzia dei 4 punti rispetto a un asse ortogonale al piano  $\pi$  passante per il centro d'inerzia;  $\theta$  è un angolo che indica rotazione intorno a tale asse.

58 CAPITOLO 12. ALCUNI ESEMPI DI SISTEMI LAGRANGIANI

Si verifica immediatamente (cfr. la (42.18)) che

$$56.3 \quad I = 4m \left( \frac{\ell}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2m\ell^2 = 2m, \quad (56.3)$$

così che

$$56.4 \quad T = 2m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\dot{\theta}^2. \quad (56.4)$$

L'energia potenziale è semplicemente

$$56.5 \quad U = (4m)gy, \quad (56.5)$$

così che la lagrangiana che descrive il sistema è data da

$$56.6 \quad \mathcal{L} = T - U = 2m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\dot{\theta}^2 - 4mgy \quad (56.6)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$56.7 \quad \begin{cases} 4m\ddot{x} = 0, \\ 4m\ddot{y} = -4mg, \\ 2m\ddot{\theta} = 0. \end{cases} \quad (56.7)$$

Ovviamente non esistono posizioni d'equilibrio dal momento che il potenziale non ammette punti stazionari.

Corretto, ancorché inutilmente complicato, è anche il seguente procedimento. Se indichiamo con  $(x_1, y_1)$  le coordinate del punto  $P_1$ , si ha

$$56.8 \quad \begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1), & P_2 &= (x_1 + \sin \theta, y_1 - \cos \theta), \\ P_3 &= (x_1 + \sin \theta - \cos \theta, y_1 - \cos \theta - \sin \theta), & P_4 &= (x_1 - \cos \theta, y_1 - \sin \theta), \end{aligned} \quad (56.8)$$

dove  $\theta$  si immagina misurato a partire dalla verticale discendente. Si trova allora

$$56.9 \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^4 \mathbf{v}_i^2 \\ &= 2m \left( \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\theta}\dot{x}_1 (\sin \theta + \cos \theta) + \dot{\theta}\dot{y}_1 (\sin \theta - \cos \theta) \right), \end{aligned} \quad (56.9)$$

se  $\mathbf{v}_i$  è la velocità del punto  $P_i$ , con  $i = 1, \dots, 4$ .

L'energia potenziale è

$$56.10 \quad mg(4y_1 - 2 \sin \theta - 2 \cos \theta), \quad (56.10)$$

così che la lagrangiana risulta essere

$$56.11 \quad \begin{aligned} \mathcal{L} &= T - U = 2m \left( \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\theta}\dot{x}_1 (\sin \theta + \cos \theta) + \dot{\theta}\dot{y}_1 (\sin \theta - \cos \theta) \right) \\ &\quad - mg(4y_1 - 2 \sin \theta - 2 \cos \theta), \end{aligned} \quad (56.11)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$56.12 \quad \begin{cases} 4m\ddot{x}_1 + 2m\ddot{\theta}(\sin\theta + \cos\theta) + 2m\dot{\theta}^2(\cos\theta - \sin\theta) = 0, \\ 4m\ddot{y}_1 + 2m\ddot{\theta}(\sin\theta - \cos\theta) + 2m\dot{\theta}^2(\cos\theta + \sin\theta) = -4mg, \\ 4m\dot{\theta} + 2m\ddot{x}_1(\cos\theta + \sin\theta) + 2m\dot{y}_1(\sin\theta - \cos\theta) = 2m(\cos\theta - \sin\theta). \end{cases} \quad (56.12)$$

È immediato verificare che le due lagrangiane sono equivalenti, notando che

$$56.13 \quad \begin{aligned} x &= x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta - \pi/4) = x_1 + \frac{1}{2}(\sin\theta - \cos\theta), \\ y &= y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta - \pi/4) = x_1 - \frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned} \quad (56.13)$$

se  $C = (x, y)$  e  $P_1 = (x_1, y_1)$ .

*p.56.4* **56.4.** *Quadrato con un punto fisso.* Se il punto  $P_1$  è fisso in  $O$ , si scelga un sistema di coordinate  $(x, y)$  sul piano  $\pi$  tale che  $O = (0, 0)$  e l'asse  $y$  sia la verticale passante per  $O$  (cfr. la figura 56.2). Le coordinate cartesiane dei punti  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$  sono allora date da

$$56.14 \quad \begin{aligned} P_1 &= (0, 0), & P_2 &= (\sin\theta, -\cos\theta), \\ P_3 &= (\sin\theta - \cos\theta, -\cos\theta - \sin\theta), & P_4 &= (-\cos\theta, -\sin\theta). \end{aligned} \quad (56.14)$$

Le corrispondenti velocità sono quindi

$$56.15 \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (\cos\theta\dot{\theta}, \sin\theta\dot{\theta}), \\ \mathbf{v}_3 &= (\cos\theta\dot{\theta} + \sin\theta\dot{\theta}, \sin\theta\dot{\theta} - \cos\theta\dot{\theta}), & \mathbf{v}_4 &= (\sin\theta\dot{\theta}, -\cos\theta\dot{\theta}). \end{aligned} \quad (56.15)$$

L'energia cinetica del sistema è

$$56.16 \quad T = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 + m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 = 2m\dot{\theta}^2, \quad (56.16)$$

e l'energia potenziale è (cfr. l'esercizio 5)

$$56.17 \quad \begin{aligned} U &= -2mg(\cos\theta + \sin\theta) + m\omega^2 \sin\theta \cos\theta \\ &= -2mg(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{1}{2}m\omega^2 \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (56.17)$$

avendo trascurato i termini costanti.

Quindi la lagrangiana del sistema è data da

$$56.18 \quad \mathcal{L} = T - U = 2m\dot{\theta}^2 + 2mg(\cos\theta + \sin\theta) - m\omega^2 \sin\theta \cos\theta \quad (56.18)$$

e la corrispondente equazione di Eulero-Lagrange è

$$56.19 \quad \begin{aligned} 4m\ddot{\theta} &= 2mg(\cos\theta - \sin\theta) - m\omega^2 \cos 2\theta \\ &= 2mg(\cos\theta - \sin\theta) - m\omega^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta). \end{aligned} \quad (56.19)$$

p.56.5 **56.5.** *Configurazioni d'equilibrio.* I punti d'equilibrio sono i punti stazionari del potenziale. Si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{dU}{d\theta} &= -2mg(\cos\theta - \sin\theta) + m\omega^2 \cos 2\theta \\
 56.20 \quad &= -2mg(\cos\theta - \sin\theta) + m\omega^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
 &= m[-2g + \omega^2(\cos\theta + \sin\theta)](\cos\theta - \sin\theta),
 \end{aligned} \tag{56.20}$$

così che  $dU/d\theta = 0$  per

$$56.21 \quad \sin\theta = \cos\theta, \tag{56.21}$$

che è verificata per

$$56.22 \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \pi + \frac{\pi}{4}, \tag{56.22}$$

oppure per

$$56.23 \quad \cos\theta + \sin\theta = \frac{2g}{\omega^2} \equiv \alpha. \tag{56.23}$$

Per trovare le soluzioni dell'ultima relazione, tenendo conto che

$$\begin{aligned}
 \cos\theta + \sin\theta &= \sqrt{2} \left( \cos\theta \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin\theta \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 56.24 \quad &= \sqrt{2}(\cos\theta \cos\pi/4 + \sin\theta \sin\pi/4) \\
 &= \sqrt{2} \cos(\theta - \pi/4),
 \end{aligned} \tag{56.24}$$

si ottiene

$$56.25 \quad \theta = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \tag{56.25}$$

purché sia  $\alpha \leq \sqrt{2}$ , *i.e.*

$$56.26 \quad \omega^2 \geq \sqrt{2}g. \tag{56.26}$$

Se tale diseuguaglianza è soddisfatta con il segno stretto abbiamo due soluzioni dell'equazione  $\cos(\theta - \pi/4) = \alpha$ , che possiamo indicare con  $\theta_0$  e  $\pi/2 - \theta_0$ , dove  $\theta_0$  è quella compresa in  $[-\pi/4, \pi/4]$ , *i.e.*

$$56.27 \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{\alpha}{\sqrt{2}}. \tag{56.27}$$

In conclusione, per  $\omega^2 > \sqrt{2}g$ , abbiamo 4 configurazioni d'equilibrio:

$$\begin{aligned}
 (Q_1) \quad &\theta = \pi/4, \\
 (Q_2) \quad &\theta = \pi + \pi/4, \\
 (Q_3) \quad &\theta = \theta_0 \in [-\pi/4, \pi/4], \\
 (Q_4) \quad &\theta = \pi/2 - \theta_0,
 \end{aligned} \tag{56.28}$$

mentre, per  $\omega^2 \leq \sqrt{2}g$ , abbiamo solo due configurazioni d'equilibrio:

$$\begin{aligned} 56.29 \quad (Q_1) \quad \theta &= \pi/4, \\ (Q_2) \quad \theta &= \pi + \pi/4. \end{aligned} \quad (56.29)$$

Si noti che per  $\alpha = \sqrt{2}$ , *i.e.* per  $\omega^2 = \sqrt{2}g$ , le due posizioni  $(Q_3)$  e  $(Q_4)$  coincidono con  $(Q_1)$ .

Per discutere la stabilità delle posizioni d'equilibrio trovate occorre studiare la derivata seconda. Risulta

$$56.30 \quad \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta) = 2mg(\sin\theta + \cos\theta) - 2m\omega^2 \sin 2\theta. \quad (56.30)$$

Quindi, utilizzando le identità trigonometriche

$$\begin{aligned} 56.31 \quad \sin \pi/4 &= \cos \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin(\pi + \pi/4) &= \cos(\pi + \pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin \pi/2 &= 1, \quad \cos \pi/2 = 0, \\ \sin 2\theta &= (\cos \theta + \sin \theta)^2 - 1, \end{aligned} \quad (56.31)$$

si trova

$$\begin{aligned} 56.32 \quad \frac{d^2U}{d\theta^2}(\pi/4) &= 2m\sqrt{2}g - 2m\omega^2 = 2m\omega^2 \left( \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - 1 \right), \\ \frac{d^2U}{d\theta^2}(\pi + \pi/4) &= -2m\sqrt{2}g - 2m\omega^2 = 2m\omega^2 \left( -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} - 1 \right), \\ \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_0) &= 2mg\alpha - 2m\omega^2 (\alpha^2 - 1) \\ &= 2m\omega^2 \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha^2 + 1 \right) = 2m\omega^2 \left( \frac{2 - \alpha^2}{2} \right), \\ \frac{d^2U}{d\theta^2}(\pi/2 - \theta_0) &= \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_0), \end{aligned} \quad (56.32)$$

così che si vede che  $(Q_2)$  è sempre instabile,  $(Q_1)$  è stabile per  $\alpha > \sqrt{2}$  (*i.e.*  $\omega^2 < \sqrt{2}g$ ), mentre  $(Q_3)$  e  $(Q_4)$  sono stabili per  $\alpha < \sqrt{2}$  (*i.e.*  $\omega^2 > \sqrt{2}g$ ).

Resta da discutere il caso  $\omega^2 = \sqrt{2}g$ . In tal caso, scrivendo  $\theta = \pi/4 + \varphi$ , utilizzando le identità

$$\begin{aligned} 56.33 \quad \sin(\pi/4 + \varphi) &= \sin \pi/4 \cos \varphi + \sin \varphi \cos \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi), \\ \cos(\pi/4 + \varphi) &= \cos \pi/4 \cos \varphi - \sin \varphi \sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \varphi - \sin \varphi), \\ \sin(\pi/2 + 2\varphi) &= \sin \pi/2 \cos 2\varphi + \cos \pi/2 \sin 2\varphi = \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (56.33)$$

62 CAPITOLO 12. ALCUNI ESEMPI DI SISTEMI LAGRANGIANI

e sviluppando in  $\varphi$ , per  $\varphi \approx 0$ , l'energia potenziale diventa

$$\begin{aligned}
 U &= -2mg(\cos(\pi/4 + \varphi) + \sin(\pi/4 + \varphi)) + \frac{m\omega^2}{2} \sin(\pi/2 + 2\varphi) \\
 &= -2mg \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \varphi - \sin \varphi + \cos \varphi + \sin \varphi) + \sqrt{2}mg \frac{1}{2} \cos 2\varphi \\
 56.34 \quad &= \sqrt{2}mg \left( -2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \tag{56.34} \\
 &= \sqrt{2}mg \left[ -\frac{3}{2} + (1-1)\varphi^2 + \left( -\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \right) \varphi^4 + O(\varphi^6) \right] \\
 &= \text{costante} + C\varphi^4 + O(\varphi^6),
 \end{aligned}$$

con  $C > 0$ , e quindi la posizione d'equilibrio risulta essere stabile.

Più semplicemente si poteva osservare che per il teorema di Weierstrass la funzione  $U(\theta)$  deve avere massimi e minimi in  $[-\pi, \pi]$ . Inoltre, per il teorema 18.30 i minimi (isolati) corrispondono a punti d'equilibrio stabile. Poiché  $\pi + \pi/4$  è un punto d'equilibrio instabile e quindi non può essere un minimo, ne segue che deve essere un minimo (isolato) per  $U(\theta)$  l'unico altro punto stazionario esistente, *i.e.*  $\pi/4$ : quindi  $\pi/4$  è un punto d'equilibrio stabile.

*p.56.6* **56.6.** *In presenza delle molle.* Aggiungendo il punto  $P_0$  e le due molle che lo connettono ai punti  $P_2$  e  $P_4$ , l'energia cinetica diventa

$$56.35 \quad T = 2m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2, \tag{56.35}$$

e l'energia potenziale diventa

$$56.36 \quad U = mgy - 2mg(\cos \theta + \sin \theta) + m\omega^2 \sin \theta \cos \theta + ky^2 + ky(\cos \theta + \sin \theta), \tag{56.36}$$

avendo, al solito, trascurato i termini costanti.

Quindi la lagrangiana del sistema è data da

$$\begin{aligned}
 56.37 \quad \mathcal{L} = T - U &= 2m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy + 2mg(\cos \theta + \sin \theta) \\
 &\quad - m\omega^2 \sin \theta \cos \theta - ky^2 - ky(\cos \theta + \sin \theta), \tag{56.37}
 \end{aligned}$$

e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$56.38 \quad \begin{cases} 4m\ddot{\theta} = [2mg - ky](\cos \theta - \sin \theta) - m\omega^2 \cos 2\theta, \\ m\ddot{y} = -mg - 2ky - k(\cos \theta + \sin \theta). \end{cases} \tag{56.38}$$

*p.56.7* **56.7.** *Determinazione delle forze vincolari.* Per prima cosa dimostriamo che, per i valori dei parametri dati, *i.e.*  $m = k = g = \omega = 1$ , la configurazione  $(Q_1)$  data da

$$56.39 \quad (\theta, y) = (\pi/4, -mg/2k - 1/\sqrt{2}) = (\pi/4, -1/2 - 1/\sqrt{2}) \tag{56.39}$$



risulta essere una posizione d'equilibrio stabile.

I punti d'equilibrio sono i punti stazionari del potenziale, che ora dipende dalle due variabili  $(\theta, y)$ .

Si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial \theta} &= (\cos \theta - \sin \theta) (ky - 2mg) + m\omega^2 \cos 2\theta \\
 &= (\cos \theta - \sin \theta) [ky - 2mg + m\omega^2 (\cos \theta + \sin \theta)], \\
 \frac{\partial U}{\partial y} &= mg + k [2y + (\cos \theta + \sin \theta)],
 \end{aligned}
 \tag{56.40}$$

così che  $\partial U / \partial y = 0$  per

$$y = -\frac{mg}{2k} - \frac{1}{2} (\cos \theta + \sin \theta).
 \tag{56.41}$$

Si vede inoltre che  $\partial U / \partial \theta = 0$  è verificata per

$$\sin \theta = \cos \theta,$$

che vale per

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \pi + \frac{\pi}{4}.
 \tag{56.42}$$

Se  $\theta = \pi/4$ , l'equazione  $\partial U / \partial y = 0$  implica  $y = -mg/2k - 1/\sqrt{2}$ . In particolare, per i valori dei parametri dati, si ha che  $(Q_1)$  è un punto d'equilibrio.

Per discutere la stabilità del punto d'equilibrio  $(Q_1)$ , occorre considerare la matrice hessiana  $\mathcal{H}(\theta, y)$ , i cui elementi sono

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{11} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = (2mg - ky) (\sin \theta + \cos \theta) - 2m\omega^2 \sin 2\theta, \\
 \mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{21} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial y} = k (\cos \theta - \sin \theta), \\
 \mathcal{H}_{22} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2k.
 \end{aligned}
 \tag{56.43}$$

Si trova allora, per la posizione d'equilibrio  $(Q_1)$ ,

$$\mathcal{H}(\pi/4, -mg/2k - 1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}mg/2 + k - 2m\omega^2 & 0 \\ 0 & 2k \end{pmatrix},
 \tag{56.44}$$

così che  $\det \mathcal{H}(\pi/4, -mg/2k - 1/\sqrt{2}) > 0$  e  $\mathcal{H}_{11}(\pi/4, -mg/2k - 1/\sqrt{2}) > 0$  per

$$2m\omega^2 < k + \frac{5}{2}\sqrt{2}mg,
 \tag{56.45}$$

mentre  $\det \mathcal{H}(\pi/4, -mg/2k - 1/\sqrt{2}) < 0$  se  $2m\omega^2 > k + 5\sqrt{2}mg/2$ .

Quindi per i valori dei parametri dati, la posizione  $(Q_1)$  risulta essere stabile.

Le forze che agiscono sul punto  $P_0$  sono la forza peso

$$56.46 \quad \mathbf{f}_1^{(0)} = (0, -mg), \quad (56.46)$$

e le forze elastiche dovute alle due molle, che, nella configurazione considerata, risultano essere

$$56.47 \quad \begin{aligned} \mathbf{f}_2^{(0)} &= (k/\sqrt{2}, k(mg/2k - 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2})), \\ \mathbf{f}_3^{(0)} &= (-k/\sqrt{2}, k(mg/2k - 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2})), \end{aligned} \quad (56.47)$$

così che la forza risultante che agisce sul punto  $P_0$  è data da (cfr. l'esercizio 6)

$$56.48 \quad \mathbf{f}^{(0)} \equiv \mathbf{f}_1^{(0)} + \mathbf{f}_2^{(0)} + \mathbf{f}_3^{(0)} = (0, -mg + k(mg/2k + mg/2k)) = (0, 0). \quad (56.48)$$

Poiché siamo in una posizione d'equilibrio, se indichiamo con  $(x_0, y_0)$  le coordinate del punto  $P_0$  e teniamo conto del vincolo  $(x_0, y_0) = (0, y)$ , abbiamo

$$56.49 \quad \ddot{x}_0 = 0, \quad \ddot{y}_0 = \ddot{y} = 0, \quad (56.49)$$

così che la reazione vincolare è data da

$$56.50 \quad \mathbf{R}^{(0)} = -\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{0} : \quad (56.50)$$

nella configurazione d'equilibrio dunque il punto  $P_0$  non risente di alcuna forza vincolare.

*p.56.8* **56.8. Analisi qualitativa.** Poiché il sistema considerato è un sistema a un grado di libertà, possiamo ricavare informazioni sulle orbite nello spazio  $(\theta, y) = (\theta, \dot{\theta})$  dallo studio dell'energia potenziale

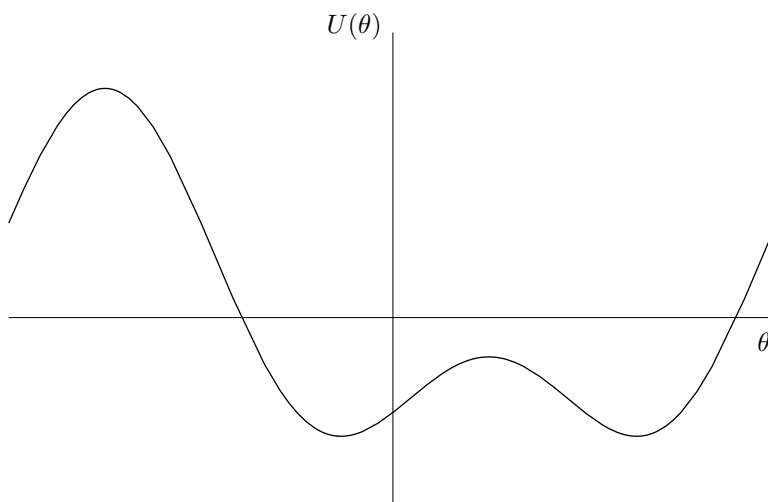
$$56.51 \quad U(\theta) = -2mg(\cos \theta + \sin \theta) + m\omega^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (56.51)$$

Come mostra la discussione al punto (1) occorre distinguere due casi:  $\alpha < \sqrt{2}$  e  $\alpha \geq \sqrt{2}$ .

Nel primo caso abbiamo le quattro configurazioni d'equilibrio  $(Q_j)$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , di cui  $(Q_3)$  e  $(Q_4)$ , individuate da  $\theta = \theta_0$  e  $\theta = \pi/2 - \theta_0$ , rappresentano dei minimi per  $U(\theta)$ , mentre le posizioni  $(Q_1)$  e  $(Q_2)$ , individuate da  $\theta = \pi/4$  e  $\theta = \pi + \pi/4$ , rappresentano dei massimi (relativi).

Si vede facilmente che

$$56.52 \quad \begin{aligned} U(\pi/4) &= -2\sqrt{2}mg + \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 (-2\sqrt{2}\alpha + 1) \equiv E_1, \\ U(\pi + \pi/4) &= 2\sqrt{2}mg + \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 (2\sqrt{2}\alpha + 1) \equiv E_2, \\ U(\theta_0) &= U(\pi/2 - \theta_0) = -2mg\alpha + \frac{1}{2}m\omega^2 (\alpha^2 - 1) \\ &= \frac{1}{m\omega^2} (-2\alpha^2 - 1) \equiv E_3, \end{aligned} \quad (56.52)$$


 FIGURA 56.3. Grafico dell'energia potenziale (56.51) per  $\alpha < \sqrt{2}$ .

dove  $E_3 < E_2 < E_1$ . Quindi, per  $\alpha < \sqrt{2}$ ,  $U(\theta)$  ha la forma rappresentata nella figura 56.3.

Si può notare che il grafico di  $U(\theta)$  è simmetrico rispetto al punto  $\theta = \pi/4$ .

Infatti se definiamo

$$56.53 \quad U(\theta) = U(\pi/4 + \varphi) \equiv \tilde{U}(\varphi), \quad (56.53)$$

risulta, utilizzando le relazioni trigonometriche date al punto (2),

$$56.54 \quad \tilde{U}(\varphi) = -2\sqrt{2}mg \cos \varphi + \frac{1}{2}m\omega^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \tilde{U}(-\varphi), \quad (56.54)$$

*i.e.*  $\tilde{U}(\varphi)$  è pari in  $\varphi$ .

Nel piano  $(\theta, y)$  quindi le curve di livello sono della forma in figura 56.4. Si hanno due punti d'equilibrio stabile in  $\theta_0$  e  $\pi/2 - \theta_0$ , corrispondenti all'energia  $E = E(\theta_0, 0) \equiv H(\pi/2 - \theta_0, 0) = E_3$ , dove

$$56.55 \quad H = T + U \quad (56.55)$$

è l'energia vista come funzione di  $(\theta, \dot{\theta})$ , che è una costante del moto, essendo il sistema sotto studio un sistema meccanico conservativo.

Si ha inoltre un punto d'equilibrio instabile in  $\pi/4$  che giace su una curva di livello che comprende, oltre al punto stesso, anche le separatrici di energia  $E = H(\pi/4, 0) = E_2$ , e un punto d'equilibrio instabile in  $\pi + \pi/4$  che giace su una curva di livello che comprende, oltre al punto stesso, anche le separatrici di energia  $E = H(\pi + \pi/4, 0) = E_1$ .

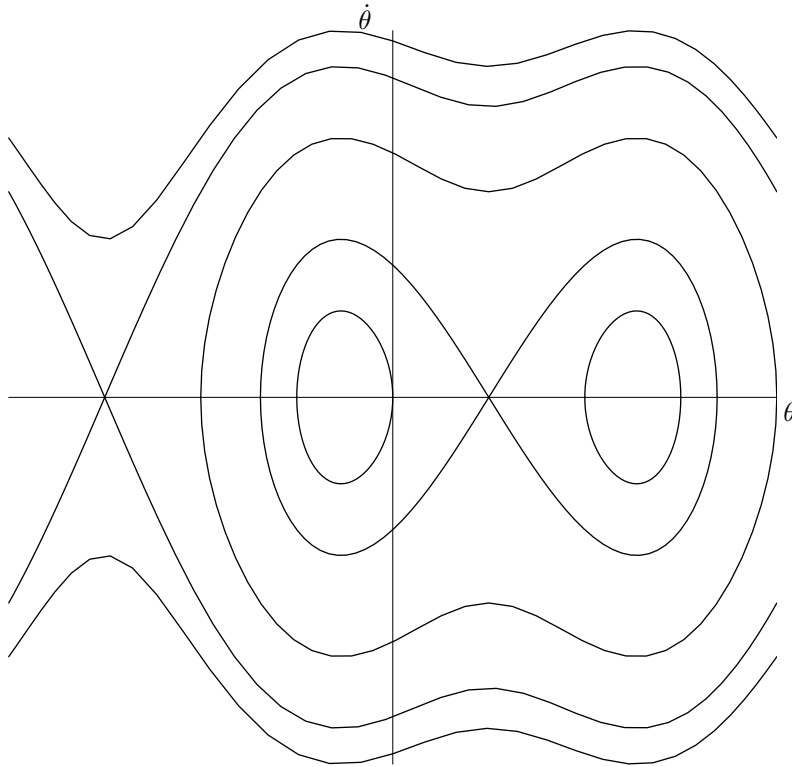


FIGURA 56.4. Curve di livello per il sistema di energia potenziale (56.51) per  $\alpha < \sqrt{2}$ .

Il verso di percorrenza delle traiettorie è da sinistra a destra nel semipiano superiore e da destra a sinistra nel semipiano inferiore.

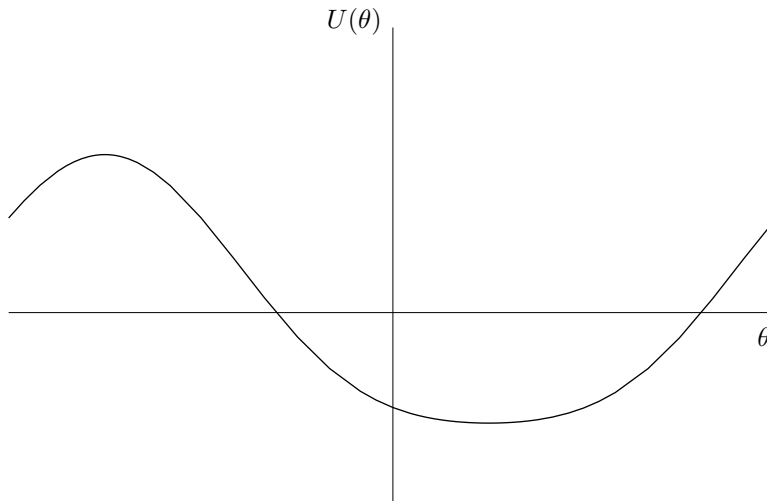
Tutte le traiettorie che non appartengono alle curve di livello individuate dalle separatrici e dai punti d'equilibrio sono periodiche.

Possiamo individuarle tramite la condizione

$$56.56 \quad (\bar{\theta}, \bar{y}) \text{ tali che } H(\bar{x}, \bar{y}) = E \text{ con } E > E_3, \quad E \neq E_1, E_2. \quad (56.56)$$

Nel caso in cui sia  $\alpha \geq \sqrt{2}$  si hanno solo due punti critici per l'energia potenziale, che corrispondono al punto di minimo  $\theta = \pi/4$  e al punto di massimo  $\theta = \pi + \pi/4$ . Di nuovo il grafico di  $U(\theta)$  è simmetrico rispetto al punto  $\theta = \pi/4$ : esso è rappresentato nella figura 56.5, tenendo conto che

$$56.57 \quad \begin{aligned} U(\pi/4) &= -2\sqrt{2}mg + \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 (-2\sqrt{2}\alpha + 1) \equiv E_1, \\ U(\pi + \pi/4) &= 2\sqrt{2}mg + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{1}{2}m\omega^2 (2\sqrt{2}\alpha + 1) \equiv E_2, \end{aligned} \quad (56.57)$$

FIGURA 56.5. Grafico dell'energia potenziale (56.51) per  $\alpha \geq \sqrt{2}$ .

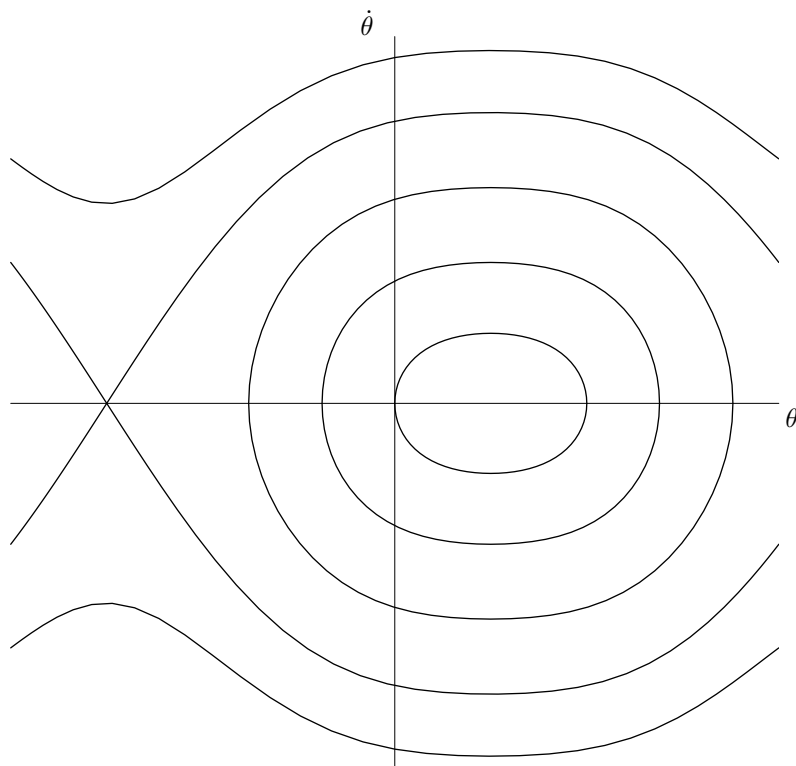
Corrispondentemente le orbite nello spazio  $(\theta, y)$  sono date dalla figura 56.6 e possono essere discusse come nel caso precedente con le ovvie modifiche.

Le traiettorie periodiche sono individuate dalle condizioni iniziali

$$56.58 \quad (\bar{\theta}, \bar{y}) \text{ tali che } H(\bar{x}, \bar{y}) = E \text{ con } E > E_2, \quad E \neq E_1. \quad (56.58)$$

### Nota bibliografica

Abbiamo seguito per il paragrafo §54 [Dell'Antonio], Cap. VII.

FIGURA 56.6. Curve di livello per il sistema di energia potenziale (56.51) per  $\alpha \geq \sqrt{2}$ .

### Esercizi

**Esercizio 1.** Dedurre la (54.12) dall'analisi del paragrafo §30.

**Esercizio 2.** Determinare le configurazioni d'equilibrio del sistema lagrangiano dell'esercizio 4 del Capitolo 11.

**Esercizio 3.** Dimostrare che data una matrice  $A$  definita positiva tutti gli elementi diagonali  $A_{ii}$  sono strettamente positivi. [Soluzione. Sia  $A$  una matrice  $N \times N$  definita positiva: si deve avere allora  $\langle x, Ax \rangle > 0$  per ogni  $x \neq 0$ . Prendendo  $x \in \mathbb{R}^N$  tale che  $x_j = \delta_{ij}$  si trova  $\langle x, Ax \rangle = A_{ii}$ , quindi  $A_{ii} > 0$ .]

**Esercizio 4.** Dimostrare che nel caso (4) dell'esempio 55.2 l'energia potenziale è data dalla (55.38). [Soluzione. Il sistema solidale con il piano rotante è un sistema non inerziale, quindi bisogna tener conto delle forze apparenti (cfr. il teorema 34.6 del Capitolo 8). La forza che agisce su un punto  $P$  del piano, di massa  $m$  e coordinate  $\mathbf{Q} = (x, y, 0)$ , è data da

$$\mathbf{F} = 2m [\Omega, \dot{\mathbf{Q}}] - m [\dot{\Omega}, \mathbf{Q}] - m [\Omega, [\Omega, \mathbf{Q}]],$$

dove  $\mathbf{F}$  è la forza attiva espressa nel sistema solidale e  $\Omega$  è il vettore velocità angolare. Nel nostro caso  $\Omega$  è costante (è un vettore diretto lungo l'asse verticale e di modulo costante  $\omega$ ), quindi  $\dot{\Omega} = \mathbf{0}$ . Inoltre la forza di Coriolis  $-2m[\Omega, \dot{\mathbf{Q}}]$  è ortogonale al piano rotante, quindi non agisce sul moto (ma solo, eventualmente, sulla reazione vincolare). Infine la forza centrifuga  $-m[\Omega, [\Omega, \mathbf{Q}]]$ , espressa nelle coordinate del sistema rotante ha componente  $m\omega^2 x$  lungo l'asse  $x$  e componente nulla lungo l'asse  $y$ . Quindi se si definisce

$$U_0 = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

si può interpretare la forza centrifuga come la forza corrispondente all'energia potenziale centrifuga  $U_0$ .]

**Esercizio 5.** Dimostrare che nel caso (2) dell'esempio 56.2 l'energia potenziale è data dalla (55.17). [Soluzione. Si ragiona come per l'esercizio 4.]

**Esercizio 6.** Dimostrare la (56.48). [Soluzione. Basta dimostrare che le forze apparenti non agiscono sul punto  $P_0$ . Questo segue direttamente dalla discussione dell'esercizio 4, notando che se  $\mathbf{Q}$  individua il punto  $P_0$  allora i vettori  $\Omega, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}$  sono paralleli e ricordando che il prodotto vettoriale di vettori paralleli è nullo.]

**Esercizio 7.** Un sistema meccanico è costituito da tre punti  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , di massa  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ . I punti  $P_1$  e  $P_2$  sono vincolati a muoversi lungo una retta orizzontale (che si può identificare con l'asse  $x$ ), mentre il punto  $P_3$  si muove lungo una retta verticale (che si può identificare con l'asse  $y$ ). Tra i punti  $P_1$  e  $P_2$  agiscono due forze conservative repulsive, di modulo, rispettivamente,  $\alpha d^{-2}(P_1, P_2)$  e  $\beta d^4(P_1, P_2)$ , se  $d(P_1, P_2)$  è la distanza tra i punti  $P_1$  e  $P_2$  e  $\alpha, \beta$  sono costanti positive. Il punto  $P_3$  è collegato ai punti  $P_1$  e  $P_2$  tramite due molle, entrambe di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Cfr. la figura 1.

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane le coordinate  $x_1, x_2, y$  tali che  $P_1 = (x_1, 0)$ ,  $P_2 = (x_2, 0)$  e  $P_3 = (0, y)$ .
- (2) Determinare le configurazioni d'equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri  $\alpha, \beta, k, g$ , dove  $g$  è la costante gravitazionale.
- (3) Discutere in particolare il caso in cui sia  $\alpha = \beta = 1$  e  $k = 5$ , e determinare la forza vincolare che agisce sul punto  $P_1$  in corrispondenza della configurazione d'equilibrio stabile risultante.

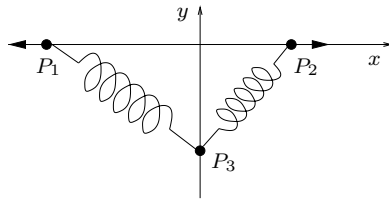


FIGURA 1. Sistema discusso nell'esercizio 7.

**Esercizio 8.** Un sistema meccanico è costituito da tre punti  $P_1, P_2$  e  $Q$ , di masse, rispettivamente,  $m_1 = m_2 = m$  e  $m_3 = 2m$ , vincolati su un piano verticale  $\pi$ . I due punti  $P_1$  e  $P_2$  si muovono lungo un asse orizzontale (che si può identificare con l'asse  $x$ ) e sono entrambi collegati a  $Q$  tramite due sbarre rettilinee di lunghezza  $L$  e massa trascurabile. Il punto  $P_1$  è collegato a un punto fisso  $O$  dell'asse lungo cui scorre tramite una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla. Cfr. la figura 2.

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa  $x$  del punto  $Q$  lungo l'asse orizzontale e l'angolo  $\theta$  che la retta passante per i punti  $P_1$  e  $Q$  forma con tale asse.
- (2) Determinare le posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità.

70 CAPITOLO 12. ALCUNI ESEMPI DI SISTEMI LAGRANGIANI

- (3) Per  $k = 0$  discutere qualitativamente il moto.  
 (4) Sempre per  $k = 0$ , partendo dalla configurazione iniziale

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

determinare la forza vincolare nel punto  $Q$  in funzione del tempo e descrivere qualitativamente il moto. Calcolare in particolare la forza vincolare in  $Q$  quando tale punto si trova a quota  $L/\sqrt{2}$  al di sotto dell'asse orizzontale  $x$ .

- (5) Discutere come si modifica la discussione se le due sbarre hanno massa  $M$ .

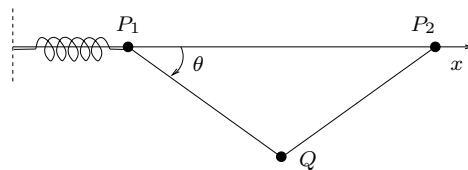


FIGURA 2. Sistema discusso nell'esercizio 8.

**Esercizio 9.** Un sistema meccanico è costituito da una sbarra omogenea di massa  $m$ , di lunghezza  $\ell$  e di sezione trascurabile. Un estremo della sbarra è incernierato in un punto  $Q$  di un'asta verticale, anch'essa di sezione trascurabile. Sia  $g$  la costante di gravità. L'asta verticale ruota con velocità angolare  $\omega(t)$ . Cfr. la figura 3.

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.  
 (2) Se  $\omega(t) = \omega$  è costante, verificare che, nel sistema di riferimento solidale con il piano  $\pi$  che ruota intorno all'asta verticale con velocità angolare  $\omega$ , il sistema ammette posizioni di equilibrio (equilibri relativi) e discuterne la stabilità al variare dei parametri  $\omega, g, \ell, m$ .

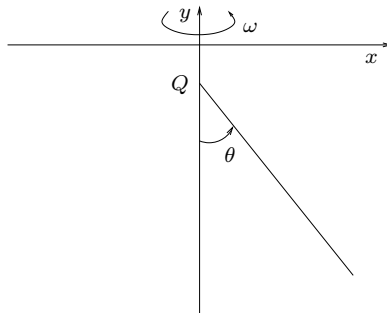


FIGURA 3. Sistema discusso nell'esercizio 9.

**Esercizio 10.** Un sistema meccanico appartenente a un piano verticale  $\pi$  è costituito da un disco omogeneo di raggio  $r$  e massa  $m$ , vincolato a rotolare senza strisciare all'interno di una circonferenza di raggio  $R$  tale che  $\ell \equiv R - r > 0$ .

Il centro  $C$  del disco è connesso tramite una molla elastica con costante di richiamo  $k$  e di lunghezza a riposo nulla a un punto fisso  $P$ , posto sulla verticale passante per il centro  $O$  della circonferenza, a distanza  $d$  da esso.

Si consideri come variabile lagrangiana l'angolo  $\theta$  che  $OC$  forma con la verticale per  $O$ . Cfr. la figura 4.



- (1) Scrivere la Lagrangiana che descrive il sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
- (2) Determinare quale valore  $d_0$  deve assumere  $d$ , in funzione dei parametri del sistema, perché il disco rotoli senza strisciare come se fosse libero (cioè come se su esso non agisse nessuna forza).  
Si supponga ora che sia  $d = d_0/2$ .
- (3) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi, e discutere per quali dati iniziali si hanno traiettorie periodiche.
- (4) Determinare i punti critici e discuterne la natura.
- (5) Se il piano verticale  $\pi$  ruota con velocità angolare costante  $\omega$  intorno all'asse verticale passante per  $O$ , mettendosi nel sistema di riferimento solidale con il piano  $\pi$  determinare le nuove posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità al variare del valore di  $\omega$ .
- (6) Determinare le forze vincolari in corrispondenza di una posizione d'equilibrio stabile trovata al punto precedente per  $\omega^2 = g/\ell$ , se  $g$  è la costante di gravità.

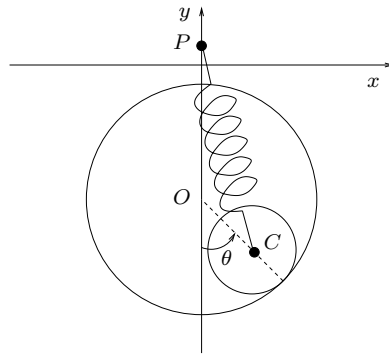


FIGURA 4. Sistema discusso nell'esercizio 10.

**Esercizio 11.** Un sistema meccanico è costituito da due punti  $P_1$  e  $P_2$ , di massa  $m_1 = m_2 = 1$  e vincolati a muoversi lungo una guida posta in un piano verticale  $\pi$ . Introducendo in  $\pi$  un sistema di coordinate  $(x, y)$ , la guida risulta definita dall'equazione  $y = x^2$  e i due punti individuati dalle coordinate  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  rispettivamente.

Sul sistema agisce la forza peso (sia  $g$  la costante di gravità). Inoltre il piano  $\pi$  ruota intorno all'asse verticale  $x = 0$  con velocità angolare uniforme  $\omega$ .

Si studino le tre seguenti configurazioni.

- Il punto  $P_2$  è fisso nell'origine e il punto  $P_1$  è mobile e collegato all'asse verticale  $x = 0$  da una molla di costante elastica  $k$ .
- Il punto  $P_2$  è fisso nell'origine e il punto  $P_1$  è mobile e collegato all'asse orizzontale  $y = 0$  da una molla di costante elastica  $k$ .
- I punti  $P_1$  e  $P_2$  sono mobili e collegati tra loro da una molla di costante elastica  $k$ . Cfr. la figura 5.

- (1) Scrivere la Lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange, nei tre casi sopra considerati.
- (2) Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare della velocità angolare  $\omega$ , nei tre casi sopra considerati.

**Esercizio 12.** Si consideri il sistema meccanico costituito da due punti  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m = 1$ , vincolati a muoversi lungo una retta orizzontale. Siano  $x_1$  e  $x_2$  le posizioni, rispettivamente, dei punti  $P_1$  e  $P_2$  lungo la retta, calcolate a partire da un punto fissato  $O$ .

I punti sono soggetti alle seguenti forze: il punto  $P_1$  è attratto dal punto  $O$  tramite una forza elastica con costante  $k = 1$ , il punto  $P_2$  è attratto dal punto  $O$  tramite una forza elastica con costante  $k = 1$ , i punti  $P_1$  e  $P_2$  si attraggono tramite una forza elastica con costante  $k = 1$  e si respingono con una forza  $\alpha|x_2 - x_1|^3$ , con  $\alpha > 0$ .

- (1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange.

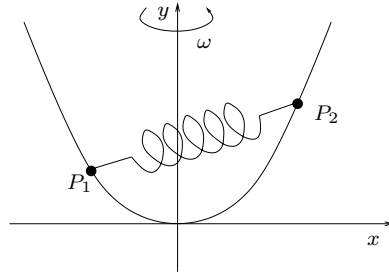


FIGURA 5. Terza configurazione del sistema discusso nell'esercizio 11.

- (2) Determinare le posizioni d'equilibrio.
- (3) Se si fissa a  $\ell > 0$  la distanza  $x_1 - x_2$  tra i due punti  $P_1$  e  $P_2$ , scrivere come si modifica la lagrangiana del sistema e determinare le nuove posizioni d'equilibrio.
- (4) Se si eliminano le due interazioni elastiche tra i punti  $P_1$  e  $P_2$  con il punto fissato  $O$ , trovare la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh e scrivere le nuove equazioni di Eulero-Lagrange.

**Esercizio 13.** Si consideri il sistema lagrangiano costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m = 1$ , vincolati a muoversi su un piano verticale su due profili di equazione, rispettivamente,  $y = x^2$  e  $y = 1$ . I due punti sono inoltre collegati da una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Cfr. la figura 6.

- (1) Si scriva la lagrangiana del sistema.
- (2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (3) Si determinino le configurazioni d'equilibrio.
- (4) Se ne discuta la stabilità.
- (5) Si determini la forza vincolare che agisce sul punto  $P_1$  in corrispondenza di una posizione d'equilibrio stabile (se esiste), per i seguenti valori dei parametri:  $2k = g = 1$  (dove  $g$  è l'accelerazione di gravità).

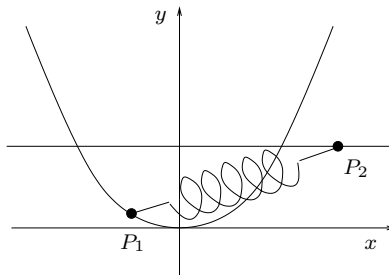


FIGURA 6. Sistema discusso nell'esercizio 13.

**Esercizio 14.** Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$ , vincolato a muoversi in un piano verticale  $(x, y)$ , lungo il profilo di equazione  $y = x^2$ , che ruota intorno all'asse verticale con velocità angolare costante  $\omega \in \mathbb{R}$ . Il punto è inoltre sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all'estremo di una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla: l'altro estremo della molla è fissato nell'origine. Cfr. la figura 7.

- (1) Si scriva la lagrangiana del sistema.
- (2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

- (3) Si determinino le eventuali configurazioni d'equilibrio nel sistema di riferimento solidale con il piano rotante al variare del parametro  $\omega$ .
- (4) Se ne discuta la stabilità.
- (5) Si determini la forza vincolare che agisce sul punto  $P$  in corrispondenza di una posizione d'equilibrio stabile (se esiste) per i valori dei parametri  $\omega = \sqrt{11}$ ,  $g = 1$  e  $k = 1$ .

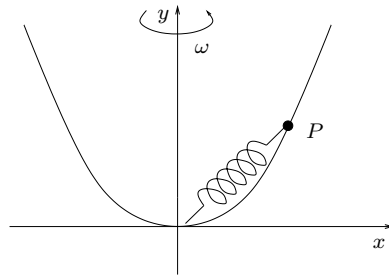


FIGURA 7. Sistema discusso nell'esercizio 14.

**Esercizio 15.** Si consideri il sistema lagrangiano costituito da tre punti materiali  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , tutti di massa  $m = 1$ , vincolati a muoversi in un piano orizzontale  $(x, y)$ ; il punto  $P_1$  si muove lungo la retta di equazione  $y = 0$ , il punto  $P_2$  lungo la retta di equazione  $y = 1 + x$  e il punto  $P_3$  lungo la retta di equazione  $y = 1 - x$ . I tre punti sono inoltre collegati tra loro da tre molle di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Cfr. la figura 8.

- (1) Si scriva la lagrangiana del sistema.
- (2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (3) Si determinino le eventuali configurazioni d'equilibrio nel sistema.
- (4) Se ne discuta la stabilità.
- (5) Si determini la forza vincolare che agisce sul punto  $P_1$  in corrispondenza di una posizione d'equilibrio stabile (se esiste).
- (6) Si supponga ora che il piano  $(x, y)$  sia verticale: discutere come cambia lo scenario tenendo conto della forza di gravità (sia  $g$  la costante di gravità).

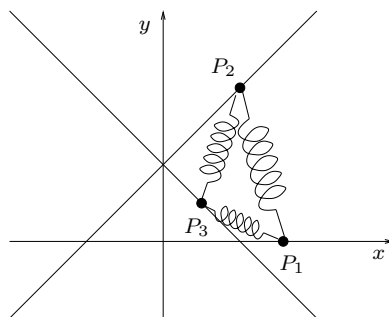


FIGURA 8. Sistema discusso nell'esercizio 15.

**Esercizio 16.** Si consideri il sistema lagrangiano costituito da due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , di massa rispettivamente  $m_1$  e  $m_2$ , vincolati a muoversi in un piano verticale nel modo seguente. Il punto  $P_1$

## 74 CAPITOLO 12. ALCUNI ESEMPI DI SISTEMI LAGRANGIANI

si muove lungo una circonferenza  $\mathcal{C}$  di raggio  $R = 1$ , e il punto  $P_2$  si muove lungo una guida rettilinea infinita di massa nulla tangente alla circonferenza  $\mathcal{C}$  in  $P_1$ .

Il punto  $P_2$  è collegato ai punti  $P_1$  e al centro  $C$  della circonferenza da due molle, entrambe di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla.

Il sistema è sottoposto all'azione della gravità, la cui intensità è  $g$ .

- (1) Quanti gradi di libertà ha il sistema?
- (2) Si scriva la lagrangiana del sistema.
- (3) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (4) Si determinino le eventuali configurazioni d'equilibrio nel sistema nel caso in cui sia  $m_1 = 0$  e  $m_2 = 1$ .
- (5) Se ne studi la stabilità; in particolare si discuta il comportamento asintotico nei limiti  $k \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow \infty$ .
- (6) Si determinino le eventuali configurazioni d'equilibrio nel sistema nel caso in cui sia  $m_1 = m_2 = 1$ .
- (7) Se ne discuta la stabilità.

**Esercizio 17.** Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un disco omogeneo  $D$ , di massa  $M = 1$  e raggio  $r = 1$ , e da un punto materiale  $P$ , di massa  $m = 1$ . Il punto e il disco sono entrambi vincolati a muoversi in un piano verticale, che identificheremo con il piano  $(x, y)$ , in modo tale che il disco rotoli senza strisciare lungo l'asse  $x$  e il punto scorra lungo l'asse  $y$ . Il centro  $O$  del disco è collegato con il punto  $P$  tramite una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla.

- (1) Si scriva la lagrangiana del sistema.
- (2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (3) Si determinino le eventuali configurazioni d'equilibrio nel sistema.
- (4) Se ne discuta la stabilità.
- (5) Si supponga ora che il piano  $(x, y)$  ruoti intorno all'asse  $y$  con velocità angolare costante  $\omega$ : discutere come cambiano le equazioni del moto.
- (6) Sotto le ipotesi del punto (5) determinare le eventuali nuove configurazioni d'equilibrio.

**Esercizio 18.** Si consideri il sistema lagrangiano che differisce da quello dell'esercizio 17 in quanto che

- (1) il disco rotola senza strisciare lungo una circonferenza di raggio  $R > 1$  e centro  $C = (0, R)$ ,
  - (2) il disco rotola senza strisciare lungo una guida di equazione  $y = x^2$ .
- In entrambi i casi si risponda alle stesse domande dell'esercizio 17.

**Esercizio 19.** Due dischi omogenei, entrambi di massa  $M$  e raggio  $r$ , rotolano senza strisciare lungo una guida posta su un piano orizzontale, mantendendosi sempre ortogonali al piano. I centri d'inerzia dei due dischi sono collegati tra loro tramite una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla, e sono inoltre collegati entrambi a un punto materiale  $P$  di massa  $m$  tramite due aste identiche di lunghezza  $L$  e massa trascurabile. Sul sistema agisce la forza di gravità. Si scelga un sistema di riferimento in cui il piano abbia equazione  $z = 0$  e la guida abbia equazione  $y = z = 0$ .

- (1) Si scriva la lagrangiana del sistema.
- (2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (3) Si determinino le eventuali configurazioni d'equilibrio nel sistema.
- (4) Se ne discuta la stabilità.
- (5) Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto  $P$ .
- (6) Si supponga ora che il piano ruoti intorno all'asse  $y$  con velocità angolare costante: si discuta l'esistenza e la stabilità di eventuali configurazioni d'equilibrio.

**Esercizio 20.** Si consideri il sistema lagrangiano ottenuto da un pendolo doppio (cf. l'esercizio 6 del Capitolo 11) attraverso la seguente modifica: la massa  $m_2$  del secondo pendolo è collegato al punto di sospensione fisso del primo pendolo tramite una molla di costante elastica  $k$  e di lunghezza a riposo trascurabile.

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- (2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.