

Capitolo 16. Meccanica hamiltoniana

sec.65

65. Sistemi Hamiltoniani

p.65.1 **65.1. Introduzione.**p.65.2 **65.2. DEFINIZIONE (TRASFORMATA DI LEGENDRE)** Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 convessa ($f''(x) > 0$). La funzione

$$65.1 \quad g(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - f(x)). \quad (65.1)$$

è chiamata la trasformata di Legendre della funzione f .

p.65.3 **65.3.** Se in (65.1) l'estremo superiore è anche un massimo, allora viene raggiunto in corrispondenza di un punto $x = x(y)$ tale che $f'(x(y)) = y$. Possiamo allora scrivere

$$65.1a \quad g(y) = yx(y) - f(x(y)), \quad f'(x(y)) = y, \quad (65.2)$$

in alternativa alla (65.1). La trasformata di Legendre ha una chiara interpretazione grafica: $x(y)$ rappresenta il punto in cui la tangente alla funzione $f(x)$ ha pendenza y ; cfr. la figura 65.1.

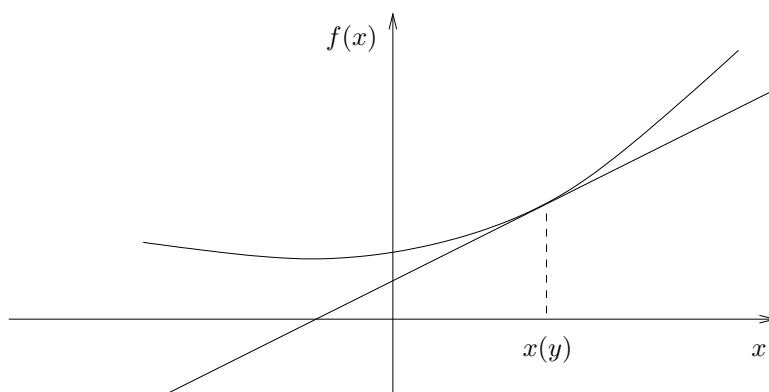


FIGURA 65.1. Interpretazione grafica della trasformata di Legendre. La retta di pendenza y è tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto $x(y)$, così che $f'(x(y)) = y$.

Si ha che g è una funzione convessa di classe C^2 . Infatti risulta $g'(y) = (f')^{-1}(y)$ (cfr. l'esercizio 1), e quindi, per la regola di derivazione della funzione inversa, $g''(y) = 1/f''(x(y)) > 0$ (cfr. l'esercizio 2).

p.65.4 **65.4.** La trasformata di Legendre è una *trasformazione involutiva* (o *involuzione*), cioè la trasformata di Legendre della funzione (65.1) è la funzione f stessa: questo vuol dire che se $g(y)$ è definita come in (65.1) allora si ha (cfr. l'esercizio 3)

$$65.2 \quad f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (yx - g(y)). \quad (65.3)$$

e se l'estremo superiore è un massimo allora è raggiunto in corrispondenza di un valore $y = y(x)$ tale che $g'(y(x)) = x$.

p.65.5 **65.5.** In più dimensioni, data una funzione $f(x)$ di classe C^2 convessa, cioè tale che

$$65.3 \quad \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) > 0, \quad (65.4)$$

si definisce

$$65.4 \quad g(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)) \quad (65.5)$$

la sua trasformata di Legendre. Di nuovo anche la funzione $g(y)$ è convessa, e la sua trasformata di Legendre è la funzione $f(x)$.

p.65.6 **65.6.** ESEMPIO. $f(x) = ax$, $a > 0$ (non strettamente convessa). Allora (cfr. l'esercizio 4)

$$65.5 \quad g(y) = \begin{cases} 0, & y = a, \\ \infty, & y \neq a, \end{cases} \quad (65.6)$$

p.65.7 **65.7.** ESEMPIO. $f(x) = ax^2/2$, $a > 0$ (strettamente convessa). Allora (cfr. l'esercizio 5) $g(y) = y^2/2a$.

p.65.8 **65.8.** ESEMPIO. Data la lagrangiana

$$65.6 \quad \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle - U(q), \quad (65.7)$$

e posto $p = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$, si definisce $H(q, p)$ la sua trasformata di Legendre rispetto \dot{q} . Risulta

$$65.7 \quad H(q, p) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + U(q) = \frac{1}{2} \langle p, A^{-1}(q)p \rangle + U(q). \quad (65.8)$$

Se $q \in \Sigma$, si ha $(q, \dot{q}) \in T\Sigma$, dove $T\Sigma$ indica il fibrato tangente di Σ . Si pone allora $z = (q, p) \in T^*\Sigma$ e si chiama $T^*\Sigma$ il *cofibrato tangente* di Σ . Si chiama *spazio delle fasi* l'insieme di definizione delle variabili (q, p) .

p.65.9 **65.9.** DEFINIZIONE (HAMILTONIANA) Data la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ definiamo hamiltoniana la funzione

$$65.7a \quad H(q, p) = \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} (\langle p, \eta \rangle - \mathcal{L}(q, \eta, t)), \quad (65.9)$$

i.e. la trasformata di Legendre della lagrangiana.

p.65.9a **65.10.** DEFINIZIONE (COORDINATE CANONICHE) *Date la coordinate q , chiameremo momenti coniugati le variabili p definite attraverso la definizione (65.9). Se la lagrangiana è una funzione di classe C^2 si ha*

$$65.7b \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}. \quad (65.10)$$

Chiameremo coordinate canoniche le variabili (q, p) .

p.65.9c **65.11.** Osservazione. *La lagrangiana è a sua volta la trasformata di Legendre della hamiltoniana (cfr. il paragrafo §65.4). In particolare si ha*

$$65.8 \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (65.11)$$

dal momento che H è la trasformata di Legendre di \mathcal{L} rispetto alla variabile \dot{q} . Inoltre si vede facilmente che si ha

$$65.9 \quad \begin{aligned} \dot{p} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (\langle p, \dot{q} \rangle - H(p, q)) \\ &= \left\langle \frac{\partial p}{\partial q}, \dot{q} \right\rangle - \frac{\partial H}{\partial q} - \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial p}{\partial q} \right\rangle = -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{aligned} \quad (65.12)$$

dove si è usata la (65.11).

p.65.9b **65.12.** Osservazione. *Si noti che la Hamiltoniana è definita a meno di una costante additiva. La situazione è quindi diversa dal caso della lagrangiana, che è invece definita a meno di una derivata totale (cfr. l'osservazione 47.29).*

p.65.10 **65.13.** DEFINIZIONE (EQUAZIONI HAMILTONIANE). *Data una Hamiltoniana $H = H(q, p, t)$ di classe C^2 si definiscono equazioni di Hamilton le equazioni*

$$65.10 \quad \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{cases} \quad (65.13)$$

che costituiscono un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine.

p.65.11 **65.14.** DEFINIZIONE (MATRICE SIMPLETTICA STANDARD). *Chiamiamo matrice simplettica standard la matrice $2n \times 2n$*

$$65.11 \quad E = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (65.14)$$

dove $0, \mathbf{1}$ sono matrici $n \times n$.

p.65.12 **65.15.** Osservazione. Data la matrice simplettica standard E si ha

$$65.12 \quad E^T = -E, \quad E^{-1} = -E, \quad E^2 = -\mathbf{1}, \quad (65.15)$$

come è immediato verificare (cfr. l'esercizio 6).

p.65.13 **65.16.** DEFINIZIONE (EQUAZIONI CANONICHE). Sia un sistema dinamico in \mathbb{R}^{2n} descritto dalle equazioni $\dot{z} = f(z)$. Diremo che tali equazioni sono equazioni canoniche se esiste una funzione H di classe C^2 in \mathbb{R}^{2n} tale che si abbia $f = E\partial H/\partial z$.

p.65.14 **65.17.** Osservazione. La definizione di hamiltoniana si estende facilmente al caso di un sistema lagrangiano definito su una varietà. In generale si parlerà di sistema hamiltoniano, in accordo con la seguente definizione.

p.65.15 **65.18.** DEFINIZIONE (SISTEMA HAMILTONIANO). Data una varietà Σ e una funzione $H: T^*\Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 si definisce sistema hamiltoniano la coppia (Σ, H) .

p.65.16 **65.19.** DEFINIZIONE (CAMPO VETTORIALE HAMILTONIANO). Si definisce campo vettoriale hamiltoniano associato all'Hamiltoniana H il campo vettoriale

$$65.13 \quad f_H = E \frac{\partial H}{\partial z} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right), \quad (65.16)$$

dove $z = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\partial/\partial z = (\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_{2n})$.

p.65.17 **65.20.** Osservazione. È facile vedere che il campo vettoriale hamiltoniano è un campo vettoriale a divergenza nulla, i.e.

$$65.14 \quad \operatorname{div} f_H = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} E_{kj} \frac{\partial^2 H}{\partial z_k \partial z_j} = 0, \quad (65.17)$$

dove $f_H(z)$ è definito in (65.16) e si è utilizzata l'antisimmetria di E (i.e. $E_{ik} = -E_{ki}$).

p.65.18 **65.21.** DEFINIZIONE (TRASFORMAZIONE CHE CONSERVA IL VOLUME). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Dato un dominio $D \subset \Omega$ chiamiamo

$$65.15 \quad \operatorname{Vol}(D) = \int_D dx \quad (65.18)$$

il volume del dominio D . Diremo che una trasformazione $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ che dipende dal parametro continuo t è una trasformazione che conserva il volume se per ogni sottoinsieme $D \subset \Omega$, se indichiamo con

$$65.16 \quad D(t) = \varphi(t, D) = \bigcup_{x \in D} \varphi(t, x) \quad (65.19)$$

l'insieme ottenuto facendo evolvere i punti di $D = D(0)$ al tempo t , si ha

$$65.17 \quad \text{Vol}(D(t)) = \text{Vol}(D) \quad (65.20)$$

per ogni t .

p.65.19 **65.22.** TEOREMA (LIOUVILLE). *Il flusso hamiltoniano conserva il volume.*

p.65.20 **65.23.** *Dimostrazione.* Dimosteremo più in generale che, dato un campo vettoriale $\dot{x} = f(x)$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, a divergenza nulla (i.e. $\text{div } f = 0$), allora il flusso corrispondente conserva il volume.

Sia $D \subset \Omega$ un dominio dello spazio delle fasi, e sia $D(t)$ l'insieme ottenuto facendo evolvere D al tempo t (cf. la (65.19)). Vogliamo quindi dimostrare che vale la (65.20).

Possiamo scrivere

$$65.18 \quad \text{Vol}(D(t)) = \int_{D(t)} dx = \int_{\varphi(-t, D(t))} dx \det \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} = \int_D dx \det \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}, \quad (65.21)$$

dove $\partial \varphi(t, x) / \partial x$ è la matrice jacobiana della trasformazione $x \rightarrow \varphi(t, x)$. Quindi

$$65.19 \quad \left. \frac{d}{dt} \text{Vol}(D(t)) \right|_{t=\bar{t}} = \int_D dx \left. \frac{d}{dt} \det \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right|_{t=\bar{t}}. \quad (65.22)$$

Per la regola di derivazione della funzione composta e per la proprietà dei determinanti $\det AB = \det A \det B$, si ha

$$65.20 \quad \left. \frac{d}{dt} \det \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right|_{t=\bar{t}} = \left. \frac{d}{dt} \det \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial \varphi(\bar{t}, x)} \right|_{t=\bar{t}} \det \frac{\partial \varphi(\bar{t}, x)}{\partial x}, \quad (65.23)$$

dove, utilizzando la proprietà $\varphi(t + \bar{t}, x) = \varphi(t, \varphi(\bar{t}, x))$,

$$65.21 \quad \begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \det \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial \varphi(\bar{t}, x)} \right|_{t=\bar{t}} &= \left. \frac{d}{dt} \det \frac{\partial \varphi(t - \bar{t}, \varphi(\bar{t}, x))}{\partial \varphi(\bar{t}, x)} \right|_{t=\bar{t}} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \det \frac{\partial \varphi(t - \bar{t}, y)}{\partial y} \right|_{t=\bar{t}} = \left. \frac{d}{dt} \det \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} \right|_{t=0}, \end{aligned} \quad (65.24)$$

dove $y = \varphi(\bar{t}, x)$, così che è sufficiente dimostrare che

$$65.22 \quad \left. \frac{d}{dt} \det \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \right|_{t=0} = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (65.25)$$

per dedurre la legge di conservazione del volume.

In (65.25) possiamo sviluppare

$$65.23 \quad \varphi(t, x) = x + f(x)t + O(t^2), \quad (65.26)$$

avendo tenuto conto che $d\varphi(t, x)/dt|_{t=0} = f(\varphi(0, x)) = f(x)$, in modo da ottenere

$$65.24 \quad \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} = \mathbb{1} + At + O(t^2), \quad A_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}. \quad (65.27)$$

Si vede facilmente (cf. l'esercizio 8) che

$$65.25 \quad \det(\mathbb{1} + tA) = 1 + \operatorname{tr} At + O(t^2) \quad (65.28)$$

da cui segue che

$$65.26 \quad \det \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} t + O(t^2), \quad (65.29)$$

e quindi

$$65.27 \quad \frac{d}{dt} \det \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} = \operatorname{div} f, \quad (65.30)$$

che implica la (65.25) sotto l'ipotesi che il campo f sia a divergenza nulla. ■

p.65.21 **65.24.** *Osservazione.* Il teorema di Liouville implica, in particolare, l'assenza di cicli limite e di punti d'equilibrio asintoticamente stabili per sistemi Hamiltoniani.

p.65.22 **65.25.** **TEOREMA (TEOREMA DEL RITORNO DI POINCARÉ).** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme compatto e sia $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ una trasformazione che conserva il volume. Per ogni aperto $U \subset \Omega$ e ogni tempo $\tau > 0$ esiste $x \in U$ e $t \geq \tau$ tali che $\varphi(t, x) \in U$.*

p.65.23 **65.26.** *Dimostrazione.* Fissato un tempo τ consideriamo l'insieme $\varphi(\tau, U)$; cfr. la definizione (65.19)). Se $\varphi(\tau, U) \cap U \neq \emptyset$ l'asserto è dimostrato.

Supponiamo quindi che si abbia $\varphi(\tau, U) \cap U = \emptyset$. Introduciamo gli insiemi $U_n = \varphi(n\tau, U)$ per $n \in \mathbb{Z}_+$; ovviamente $U_0 = U$. Supponiamo per assurdo che si abbia

$$65.28 \quad U_n \cap U = \emptyset \quad \forall n \geq 1. \quad (65.31)$$

Questo implica

$$65.29 \quad U_n \cap U_m = \emptyset \quad \forall n > m \geq 0. \quad (65.32)$$

Se $m = 0$ la (65.32) è ovvia perché coincide con la (65.31). Altrimenti, se $m > 0$, supponiamo che (65.32) non sia soddisfatta per qualche n, m . Si avrebbe allora $U_n \cap U_m \neq \emptyset$. Questo però implicherebbe $U_{n-1} \cap U_{m-1} \neq \emptyset$ (cfr. la figura 65.2): infatti se si avesse $z \in U_n \cap U_m$, e $U_{n-1} \cap U_{m-1} = \emptyset$, allora dovrebbe risultare $z = \varphi(\tau, z_n)$ e $z = \varphi(t, z_m)$, con $z_n \in U_{n-1}$ e $z_m \in U_{m-1}$, così che $z_n \neq z_m$, che violerebbe il teorema di unicità delle soluzioni. Iterando l'argomento si troverebbe

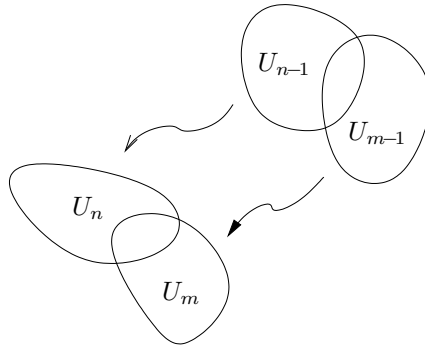


FIGURA 65.2. Se due insiemi U_n e U_m si intersecano allora anche le loro preimmagini U_{n-1} e U_{m-1} si intersecano.

quindi $U_{n-m} \cap U \neq \emptyset$, contro l'ipotesi che stiamo facendo che gli insiemi U_n abbiano tutti intersezione nulla con U .

La (65.31) implica allora

$$65.30 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \text{Vol}(U_n) = \text{Vol}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n\right). \quad (65.33)$$

D'altra parte la trasformazione φ conserva il volume, così che

$$65.29 \quad \text{Vol}(U_n) = \text{Vol}(U) \quad \forall n \geq 1, \quad (65.34)$$

quindi

$$65.30 \quad \infty = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Vol}(U) = \text{Vol}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n\right) \leq \text{Vol}(\Omega) < \infty, \quad (65.35)$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dall'ipotesi di compattezza su Ω . Siamo quindi arrivati a una contraddizione. ■

p.65.24 **65.27. Osservazione.** Il teorema 65.25 mostra quindi che facendo evolvere un qualsiasi intorno (piccolo quanto si voglia) di uno spazio compatto Ω sotto l'azione di una trasformazione che conservi il volume, allora prima o poi l'insieme evoluto interseca l'intorno di partenza; cfr. la figura 65.3.

Possiamo interpretare tale risultato dicendo che, fissato un qualsiasi dato iniziale x e un ε arbitrariamente piccolo, esiste un dato iniziale x' distante meno di ε da x , tale che la traiettoria che parte da x' ritorna vicino entro ε a x . Infatti, facendo evolvere l'intorno $B_\varepsilon(x)$, esiste un tempo t tale che $\varphi(t, B_\varepsilon(x))$ interseca $B_\varepsilon(x)$, come conseguenza del teorema 65.25. Se quindi $x'' \in \varphi(t, B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x)$ basta prendere $x' = \varphi(-t, x'')$: per costruzione $x' \in B_\varepsilon(x)$ e $\varphi(t, x') \in B_\varepsilon(x)$.

p.65.25 **65.28. Osservazione.** Il teorema 65.25 ha delle conseguenze tutt'altro che intuitive. Si immagini il seguente Gedankenexperiment, noto come esperimento di Maxwell. Un

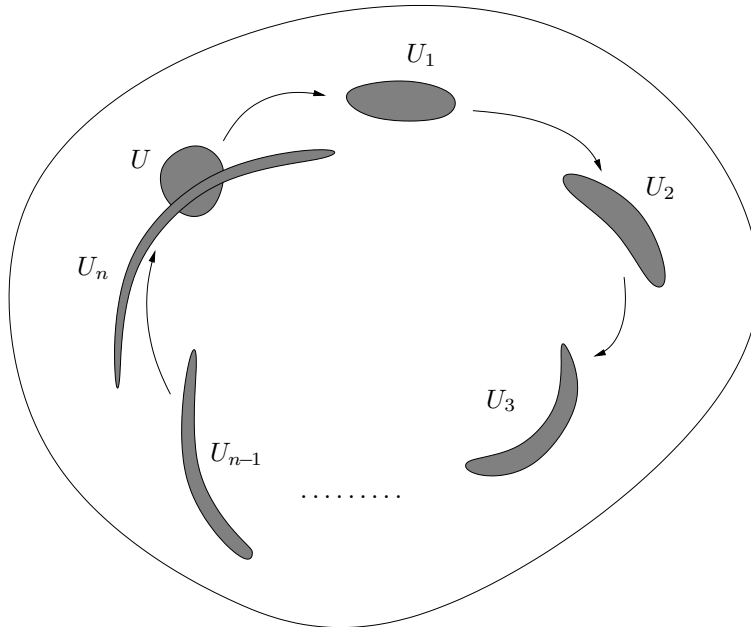


FIGURA 65.3. Situazione descritta dal teorema del ritorno di Poincaré: l'insieme che si ottiene facendo evolvere un insieme fissato U prima o poi dovrà intersecare U .

parallelepipedo è diviso in due parti (camera A e camera B) da una parete: un gas di molecole è collocato inizialmente nella camera A. A un certo istante si apre un foro nella parete, permettendo così alle molecole del gas di passare nella camera B; cfr. la figura 65.4.

Ovviamente ci si aspetta che dopo un po' di tempo le molecole tendano a equidistribuirsi tra le due camere: in media circa la metà di esse viene a trovarsi nella camera A e l'altra metà viene a trovarsi nella camera B. Che a un certo punto le molecole vengano a trovarsi nuovamente tutte nella camera B pare molto poco probabile. Tuttavia, il teorema 65.25 afferma proprio che tale probabilità non è nulla. Anzi, a un certo istante questo deve necessariamente succedere. (Si verifica facilmente che siamo nelle condizioni sotto cui il teorema si applica; cfr. l'esercizio 9).

La spiegazione di questo apparente paradosso è la seguente. Il teorema 65.25 afferma che esiste un tempo in cui il sistema ritorna arbitrariamente vicino alla configurazione iniziale (quale essa sia), ma non specifica quanto grande tale tempo possa essere. In particolare, il tempo richiesto perché questo succeda nell'esperimento di Maxwell è enorme (maggiore dell'età dell'universo). Si aggiunga anche il fatto che per applicare il teorema il sistema deve essere isolato (in altre parole stiamo considerando solo il gas di molecole nel parallelepipedo), ed è difficile, se non impossibile, immaginare una

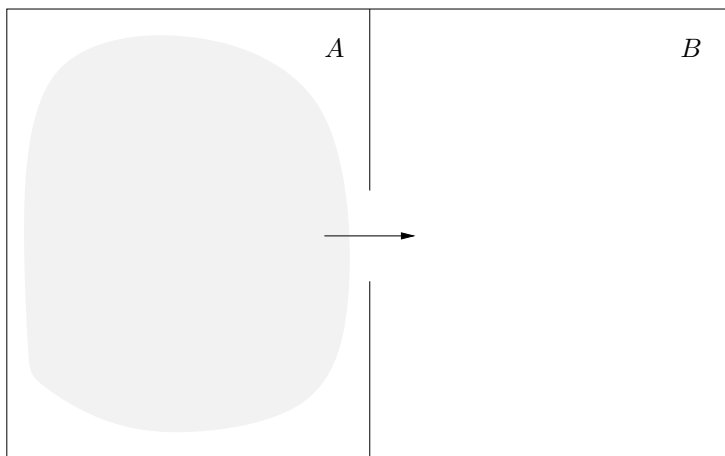


FIGURA 65.4. Esperimento di Maxwell: inizialmente tutte le molecole del gas sono nella camera A , ea un certo punto si crea un'apertura nella parete che separa le due camere A e B .

situazione in cui un sistema di questo tipo rimanga isolato, senza subire perturbazioni dall'esterno, soprattutto su tempi così lunghi. Questo spiega perché, qualora si cercasse di realizzare un esperimento del tipo descritto, non si vedrebbe mai il gas tornare interamente nella camera A .

p.65.26 **65.29. Metodo di Routh nel formalismo hamiltoniano.** Abbiamo visto (cfr. il paragrafo §54) che nel formalismo lagrangiano, in presenza di una variabile ciclica (per esempio q_N), è possibile ricondursi a un sistema lagrangiano con un grado di libertà in meno, con conseguente semplificazione del problema. L'esistenza della variabile ciclica q_N consente di esprimere la variabile \dot{q}_N in funzione delle altre variabili lagrangiane e del momento conservato $p_N = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_N$; cfr. la (54.6). Tuttavia la lagrangiana \mathcal{L}_R del nuovo sistema (lagrangiana ridotta) non si ottiene dalla lagrangiana originale semplicemente con la sostituzione (54.6). Infatti si ha $\mathcal{L}_R = \mathcal{L} - p_N\dot{q}_N$, con \dot{q}_N data dalla (54.6); cfr. la (54.5). Al contrario, nel formalismo hamiltoniano, se esiste una variabile ciclica q_N (e quindi p_N è una costante del moto) possiamo studiare il moto delle altre variabili attraverso le equazioni di Hamilton di un sistema con un grado di libertà in meno, la cui hamiltoniana H_R si ottiene da H semplicemente considerando p_N come parametro fissato. Vale infatti il seguente risultato.

p.65.27 **65.30. TEOREMA (ROUTH).** *Se un sistema hamiltoniano con hamiltoniana H è tale che*

- (1) q_N sia una variabile ciclica nel sistema di coordinate $q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N$, e
- (2) $\partial^2 H / \partial p_N^2 \neq 0$,

allora l'evoluzione delle altre coordinate è determinata dalla hamiltoniana

$$65.31 \quad H_R(q_1, \dots, q_{N-1}, p_1, \dots, p_N, t), \quad (65.36)$$

dove p_N è costante.

p.65.28 **65.31. Dimostrazione.** Sotto le ipotesi fatte possiamo applicare il teorema 54.7. Infatti la condizione $\partial^2 H / \partial p_N^2 \neq 0$, è soddisfatta se e solo se $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{q}_N^2 \neq 0$. Quindi il moto delle variabili q_1, \dots, q_{N-1} è determinato dalla lagrangiana ridotta (54.5). La corrispondente hamiltoniana sarà allora data da

$$65.32 \quad \begin{aligned} & H_R(q_1, \dots, q_{N-1}, p_1, \dots, p_{N-1}, p_N, t) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}_R(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}, t; p_N), \end{aligned} \quad (65.37)$$

così che, utilizzando la definizione (54.5) di \mathcal{L}_R , si trova

$$65.33 \quad \begin{aligned} & H_R(q_1, \dots, q_{N-1}, p_1, \dots, p_{N-1}, p_N, t) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}, \dot{q}_N, t) + \dot{q}_N p_N, \end{aligned} \quad (65.38)$$

dove $\dot{q}_N = f(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}, t; p_N)$, in accordo con la (54.6). Quindi

$$65.34 \quad \begin{aligned} & H_R(q_1, \dots, q_{N-1}, p_1, \dots, p_{N-1}, p_N, t) \\ &= \langle \dot{q}, p \rangle - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{N-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N-1}, \dot{q}_N, t) \\ &= H(q_1, \dots, q_{N-1}, p_1, \dots, p_{N-1}, p_N, t), \end{aligned} \quad (65.39)$$

ovvero H_R si ottiene da H semplicemente fissando la variabile p_N al valore costante che essa assume lungo il moto. ■

sec.66

66. Secondo principio variazionale di Hamilton

p.66.1 **66.1. Introduzione.** Indichiamo con $\mathcal{N}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2)$ lo spazio delle traiettorie $t \in [t_1, t_2] \rightarrow (q(t), p(t))$ di classe C^1 tali che $q(t_1) = q^{(1)}$ e $q(t_2) = q^{(2)}$. Indichiamo con \mathcal{N}_0 lo spazio delle deformazioni, cioè delle traiettorie $t \in [t_1, t_2] \rightarrow (u(t), v(t))$ di classe C^1 tali che $u(t_1) = u(t_2) = 0$ e $v(t_1) = v(t_2) = 0$; cfr. la figura 66.1.

p.66.2 **66.2. DEFINIZIONE (FUNZIONALE D'AZIONE)** Definiamo funzionale d'azione il funzionale

$$66.1 \quad J(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt (\langle p(t), \dot{q}(t) \rangle - H(q(t), p(t), t)), \quad (66.1)$$

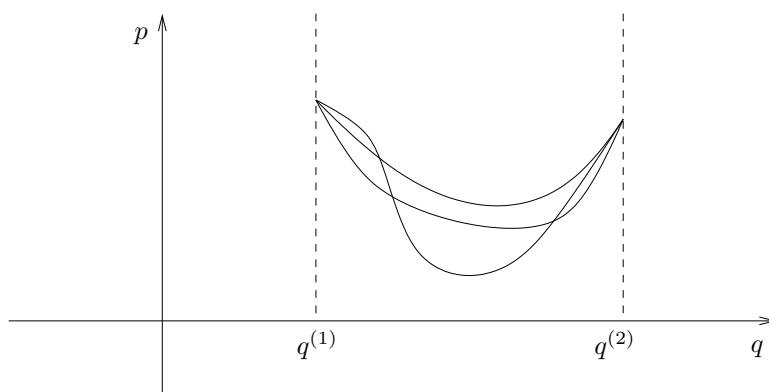


FIGURA 66.1. Rappresentazione schematica di alcune traiettorie dello spazio $\mathcal{N}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2)$. L'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate rappresentano, rispettivamente, le n coordinate q e le n coordinate p .

definito sullo spazio delle traiettorie $\mathcal{N}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2)$ a valori in \mathbb{R} .

p.66.3 **66.3.** TEOREMA. *Il differenziale del funzionale d'azione è uguale a zero se e solo se valgono le equazioni di Hamilton (65.8).*

p.66.4 **66.4.** Dimostrazione. Si ha $DJ_\gamma(h) = 0$ per ogni deformazione $h = (u, v)$ se e solo se risulta

$$66.2 \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\langle v(t), \dot{q}(t) \rangle + \langle p(t), \dot{u}(t) \rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t), u(t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t), v(t) \right\rangle \right) = 0, \quad (66.2)$$

e, integrando per parti, si può riscrivere

$$66.3 \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \langle p(t), \dot{u}(t) \rangle = \langle p(t), u(t) \rangle \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \langle \dot{p}(t), u(t) \rangle = - \int_{t_1}^{t_2} dt \langle \dot{p}(t), u(t) \rangle \quad (66.3)$$

dove si è utilizzato che $u(t_1) = u(t_2) = 0$. Quindi la (66.2) diventa

$$66.4 \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\left\langle v(t), \dot{q}(t) - \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t) \right\rangle - \left\langle u(t), \dot{p}(t) + \frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t) \right\rangle \right) = 0, \quad (66.4)$$

e data l'arbitrarietà della deformazione h , si ottengono le (65.13). ■

p.66.5 **66.5.** PRINCIPIO (SECONDO PRINCIPIO VARIAZIONALE DI HAMILTON). *Dato un sistema meccanico conservativo, eventualmente soggetto a vincoli olonomi bilateri, le traiettorie che descrivono il moto sono i punti stazionari del funzionale d'azione.*

p.66.16 **66.6.** Osservazione. Si noti che si può restringere lo spazio $\mathcal{N}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2)$ alle traiettorie che verificano l'ulteriore condizione $p(t_1) = p^{(1)}$ e $p(t_2) = p^{(2)}$, con $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ fissati, e quindi lo spazio delle deformazioni \mathcal{N}_0 alle traiettorie $t \rightarrow (u(t), v(t))$ con $v(t_1) = v(t_2) = 0$ (oltre che $u(t_1) = u(t_2) = 0$). Il funzionale $J(\gamma)$ dato dalla (66.1) risulta stazionario anche se ristretto a tale spazio.

Nota bibliografica

Esercizi

Esercizio 1. Dimostrare che se $g(y)$ è la trasformata di Legendre (65.2) della funzione convessa $f(x)$ allora $g'(y) = (f')^{-1}(y)$. [*Soluzione.* Dalla (65.2) si ha $g'(y) = x(y) + yx'(y) - f'(x(y))x'(y)$, dove $'$ denota derivazione rispetto al proprio argomento. Quindi $g'(y) = x(y) + x'(y)(y - f'(x)) = x(y)$ poiché $y = f'(x)$.]

Esercizio 2. Dimostrare che se $g(y)$ è la trasformata di Legendre (65.2) della funzione convessa $f(x)$ allora $g'(y) = 1/f''(x(y))$. [*Soluzione.* Poiché $G(y) = g'(y) = F^{-1}(y)$, dove $F(x) = f'(x)$, si ha $(F \circ G)(y) = F(G(y)) = y$, quindi, derivando rispetto a y otteniamo $F'(G(y))G'(y) = 1$. Di conseguenza $G'(y) = 1/F'(G(y)) = 1/F'(g'(y)) = 1/F''(x(y))$.]

Esercizio 3. Dimostrare che la trasformata di Legendre è una trasformazione involutiva. [*Soluzione.* Siano $g(y)$ la trasformata di Legendre di $f(x)$ e $\tilde{f}(z)$ la trasformata di Legendre di $g(y)$: allora $g(y) = yx(y) - f(x(y))$, dove $f'(x(y)) = y$, e $\tilde{f}(z) = zy(z) - g(y(z)) = zy(z) - y(z)x(y(z)) + f(x(y(z)))$, dove $g'(y(z)) = z$. Quindi l'asserto si ottiene se dimostriamo che $x(y(z)) = z$. Questo segue dal fatto che $x(y(z)) = x((g')^{-1}(z)) = (f')^{-1}((g')^{-1}(z)) = ((f')^{-1} \circ (g')^{-1})(z) = z$, poiché $f' \circ g' = \mathbb{1}$.]

Esercizio 4. Dimostrare che la trasformata di Legendre $g(y)$ della funzione $f(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$, è data dalla (65.5).

Esercizio 5. Dimostrare che la trasformata di Legendre $g(y)$ della funzione $f(x) = ax^2/2$, con $a > 0$, è data da $g(y) = y^2/2a$.

Esercizio 6. Dimostrare le relazioni (65.15).

Esercizio 7.

Esercizio 8. Dimostrare la (65.28). [*Soluzione.* Si ha

$$\mathbb{1} + At = \begin{pmatrix} 1 + A_{11}t & A_{12}t & \dots & A_{1N}t \\ A_{21}t & 1 + A_{22}t & \dots & A_{2N}t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1}t & A_{N2}t & \dots & 1 + A_{NN}t \end{pmatrix},$$

quindi il determinante è un polinomio di ordine N in t . Il termine di ordine 0 si ottiene per $t = 0$, ed è il determinante dell'identità, i.e. 1. Il termine lineare in t si ottiene prendendo il termine lineare in t dal prodotto degli elementi diagonali

$$\prod_{i=1}^N (1 + A_{ii}t) = 1 + \sum_{i=1}^N A_{ii}t + O(t^2),$$

ed è quindi $(A_{11} + \dots + A_{NN})t$. Tutti gli altri termini coinvolgono almeno due elementi $A_{ij}t A_{i'j'}t$ e sono quindi almeno quadratici in t . In conclusione $\det(\mathbb{1} + At) = 1 + (A_{11} + \dots + A_{NN})t + O(t^2)$.

Esercizio 9. Dimostrare che il teorema 65.25 si applica al sistema descritto nell'osservazione 65.28. [*Suggerimento.* Il volume in cui si muovono le molecole è finito, e se le interazioni tra le molecole sono sufficientemente regolari la conservazione dell'energia garantisce che anche le velocità non possono crescere indefinitamente. Quindi lo spazio delle fasi è limitato.]

Esercizio 10.

