

Capitolo 18. Metodo di Hamilton-Jacobi

sec.71

71. Equazione di Hamilton-Jacobi

p.71.1 **71.1. Introduzione.** Il metodo di costruzione di trasformazioni canoniche tramite funzioni generatrici può essere utilizzato allo scopo di risolvere le equazioni di Hamilton.

Infatti data una funzione generatrice $F(x, y, t)$ possiamo costruire, attraverso un procedimento di seconda specie, una trasformazione canonica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ tale che, nelle nuove coordinate, la hamiltoniana diventa (cfr. la (70.34))

$$71.1 \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (71.1)$$

Possiamo quindi cercare di determinare la funzione generatrice F in modo tale che sia $K = 0$. Questo porta all'equazione

$$71.2 \quad H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (71.2)$$

dove si è tenuto conto delle (70.30) per esprimere p in termini di (q, P) . Ricordiamo che si definisce equazione differenziale alle derivate parziali un'equazione differenziale in cui compare una funzione di più variabili insieme alle sue derivate parziali.

p.71.2 **71.2. DEFINIZIONE (EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI).** *Chiamiamo equazione di Hamilton-Jacobi l'equazione alle derivate parziali (71.2).*

p.71.3 **71.3. Osservazione.** La (71.2) è un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare del primo ordine, cioè della forma

$$71.3 \quad G\left(F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0, \quad (71.3)$$

in cui la funzione F compare in modo non lineare e solo le derivate prime di F sono coinvolte.

p.71.4 **71.4. Osservazione.** Se la trasformazione di coordinate $z \rightarrow Z(z, t)$ è tale che nelle nuove coordinate la hamiltoniana è $K = 0$, le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$71.4 \quad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \quad (71.4)$$

e quindi (Q, P) sono costanti, i.e. esiste un vettore costante $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2n}$ tale che $Q(t) = \beta$ e $P(t) = \alpha$ per ogni t .

p.71.5 **71.5.** DEFINIZIONE (INTEGRALE GENERALE). *Si dice integrale generale dell'equazione differenziale alle derivate parziali (71.3) la sua soluzione $F(q, t)$ più generale.*

p.71.6 **71.6.** Osservazione. L'integrale generale di un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali dipende da varie funzioni arbitrarie.

p.71.7 **71.7.** DEFINIZIONE (INTEGRALE COMPLETO). *Si dice integrale completo dell'equazione differenziale alle derivate parziali (71.3) una sua soluzione $F(q, t)$ che dipenda da $n + 1$ costanti arbitrarie (tante quante sono le variabili (q, t)).*

p.71.8 **71.8.** Osservazione. Nel caso dell'equazione (71.2) uno dei parametri arbitrari da cui l'integrale completo $F(q, t)$ dipende si ricava immediatamente notando che F appare solo attraverso le sue derivate, così che se F è soluzione di (71.2) lo è anche $F + \text{cost}$. Quindi uno dei parametri appare semplicemente come una costante additiva, e quindi possiamo ignorarlo. Noi saremo quindi interessati a integrali completi $F(q, \alpha, t)$ dell'equazione di Hamilton-jacobi che dipendano da n costanti arbitrarie α e che soddisfino la condizione

$$71.5 \quad \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0. \quad (71.5)$$

Questo ci permetterà di interpretare $F(q, \alpha, t)$ come funzione generatrice della trasformazione canonica $(q, p) \rightarrow (\beta, \alpha)$, con i parametri α che hanno il ruolo dei nuovi momenti P e i parametri β che rappresentano le coordinate Q di cui P sono i momenti coniugati (cfr. l'osservazione 71.4).

p.71.9 **71.9.** DEFINIZIONE (FUNZIONE PRINCIPALE DI HAMILTON). *Un integrale completo $F(q, \alpha, t)$ dell'equazione di Hamilton-Jacobi (71.2), che dipenda da n parametri e soddisfi la condizione (71.5), si chiama funzione principale di Hamilton.*

p.71.10 **71.10.** Osservazione. Sono pochi i casi in cui si riesce a dimostrare l'esistenza di un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Il problema non è solo di calcolo, ma riflette una difficoltà intrinseca. Infatti se si riesce a risolvere l'equazione vuol dire che esistono n integrali primi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, e questo non sempre è possibile. Vedremo che si chiamano *sistemi integrabili* i sistemi hamiltoniani per cui questo è possibile. Però in generale i sistemi integrabili sono pochi: basta in generale una qualsiasi perturbazione, arbitrariamente piccola, per distruggere l'integrabilità di un sistema hamiltoniano.

p.71.11 **71.11. Caso indipendente dal tempo.** Consideriamo il caso in cui la hamiltoniana H non dipenda dal tempo, i.e. $H = H(q, p)$. Allora l'equazione di Hamilton-Jacobi

diventa

$$71.6 \quad H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (71.6)$$

e poiché H è indipendente dal tempo possiamo scegliere uno dei parametri, per esempio α_n , in modo tale che sia $H = \alpha_n$. Si può allora scrivere $F(q, \alpha, t)$ nella forma

$$71.7 \quad F(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_n t. \quad (71.7)$$

Infatti, introdotta la (71.7) nella (71.6), otteniamo

$$71.8 \quad H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_n, \quad (71.8)$$

dove si è tenuto conto che, dalla definizione (71.7), si ha

$$71.9 \quad \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q}. \quad (71.9)$$

La (71.8) è quindi un'equazione differenziale alle derivate parziali per la funzione W .

Più in generale possiamo porre, in luogo della (71.7),

$$71.10 \quad F(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - E(\alpha) t, \quad (71.10)$$

dove E è una funzione arbitraria (purché di classe C^2 nei suoi argomenti), che porta all'equazione

$$71.11 \quad H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E(\alpha), \quad (71.11)$$

invece che alla (71.8).

p.71.12 **71.12.** DEFINIZIONE (FUNZIONE CARATTERISTICA DI HAMILTON). *Una soluzione $W(q, \alpha)$ dell'equazione (71.8), che dipenda da n parametri α e che soddisfi la condizione*

$$71.12 \quad \det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0, \quad (71.12)$$

prende il nome di funzione caratteristica di Hamilton.

p.71.13 **71.13.** Osservazione. Si noti che, in virtù della (71.9) si ha

$$71.13 \quad \frac{\partial W^2}{\partial q_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial F^2}{\partial q_i \partial \alpha_j}, \quad (71.13)$$

e quindi la condizione (71.12) è soddisfatta se e solo se è soddisfatta la (71.5). Quindi, nel caso indipendente dal tempo, si riesce a determinare una funzione caratteristica

di Hamilton se e solo se si riesce a determinare una funzione principale di Hamilton: i due problemi (71.2) e (71.8) sono quindi completamente equivalenti.

p.71.14 **71.14. Osservazione.** La strategia che si può quindi seguire per risolvere le equazioni di Hamilton è di considerare la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi e cercare un integrale completo. Se questo è possibile si riesce a costruire una trasformazione canonica $(q, p) \rightarrow (\beta, \alpha)$, dipendente dal tempo nel caso in cui H dipenda dal tempo e quindi si debba cercare una funzione principale di Hamilton, tale che nelle nuove coordinate il moto è banale. Si ha infatti

$$71.14 \quad \begin{cases} \dot{\beta}_k = 0, & k = 1, \dots, n, \\ \dot{\alpha}_k = 0, & k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (71.14)$$

nel caso in cui H dipenda dal tempo, e

$$71.15 \quad \begin{cases} \dot{\beta}_k = 0, & k = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\beta}_n = 1, \\ \dot{\alpha}_k = 0, & k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (71.15)$$

nel caso in cui H non dipenda dal tempo (e sia utilizzata la (71.7) per definire la funzione caratteristica di Hamilton).

Nelle nuove coordinate il moto è quindi

$$71.16 \quad \begin{cases} \beta_k(t) = \beta_k(0), & k = 1, \dots, n, \\ \alpha_k(t) = \alpha_k(0), & k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (71.16)$$

e, rispettivamente,

$$71.17 \quad \begin{cases} \beta_k(t) = \beta_k(0), & k = 1, \dots, n-1, \\ \beta_n(t) = \beta_n(0) + t, \\ \alpha_k(t) = \alpha_k(0), & k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (71.17)$$

Se invece della (71.7) si utilizza la (71.10) per definire la funzione caratteristica di Hamilton, le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili diventano

$$71.18 \quad \begin{cases} \dot{\beta}_k = \omega_k(\alpha), & k = 1, \dots, n, \\ \dot{\alpha}_k = 0, & k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (71.18)$$

dove $\omega_k = \partial E / \partial \alpha_k$.

Per ottenere il moto nelle variabili originarie (q, p) occorre quindi applicare la trasformazione inversa.

p.71.15 **71.15. Osservazione.** Guardando le (71.15) si vede che si è ottenuta la stessa conclusione del teorema della scatola di flusso, i.e. la linearizzazione del campo vettoriale.

Quello che abbiamo in più rispetto a quel teorema è che il diffeomorfismo che opera la linearizzazione definisce una trasformazione canonica.

p.71.16 **71.16. Osservazione.** In generale si riesce a dimostrare, al più, solo esistenza locale della soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi (sotto opportune ipotesi di regolarità). L'esistenza globale, come già sottolineato nell'osservazione 71.10, presenta già difficoltà in casi elementari, come possono essere i sistemi a un grado di libertà o anche un sistema bidimensionale libero se si sceglie come spazio delle fasi il toro invece del piano. Questo è dovuto al fatto che in generale non si possono trovare n costanti del moto definite globalmente: anche nel caso dei *sistemi separabili* discussi più avanti si trova che la funzione principale di Hamilton è una funzione a più valori.

p.71.17 **71.17. Sistemi unidimensionali.** Consideriamo l'equazione di Hamilton-Jacobi nel caso di un semplice sistema unidimensionale, descritto da una lagrangiana della forma

$$71.19 \quad \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - V(q), \quad (71.19)$$

con V e a di classe C^2 , e a definita positiva (i.e. $a(q) > 0$). La corrispondente hamiltoniana è allora

$$71.20 \quad H(q, p) = \frac{1}{2a(q)} p^2 + V(q), \quad (71.20)$$

e quindi l'equazione di Hamilton-Jacobi è

$$71.21 \quad \frac{1}{2a(q)} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V(q) = \alpha, \quad (71.21)$$

dove la costante α rappresenta l'energia del sistema.

Si trova allora

$$71.22 \quad W(q, \alpha) = \pm \int_{q_0}^q dq' \sqrt{2a(q') (\alpha - V(q'))}, \quad (71.22)$$

dove q_0 arbitrario, se non per la richiesta che sia $q_0 \in I$, se I è l'intervallo contenente il dato iniziale $q(0)$ tale che si abbia $\alpha - V(q) \geq 0$ per $q \in I$.

Si ha quindi (cfr. §70.17)

$$71.23 \quad \beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \pm \int_{q_0}^q dq' \sqrt{\frac{a(q')}{2(\alpha - V(q'))}} = t - t_0, \quad (71.23)$$

dove si è tenuto conto della (71.17). Infine si ha

$$71.24 \quad p = \frac{\partial W}{\partial q} = \pm \sqrt{2a(q) (\alpha - V(q))}, \quad (71.24)$$

in accordo con la (71.20).

In (71.22) si dovrà prendere il segno + o il segno - a seconda del valore di $p(0)$. Se $p(0) > 0$ si deve prendere la determinazione positiva della radice, mentre se $p(0) < 0$ se ne deve prendere la determinazione negativa. Ovviamente se $p(0) = 0$ occorre vedere se per $t > 0$ il moto avviene nel semipiano positivo o in quello negativo. In altre parole se $p(0) = 0$ si ha allora $q(0) = q_-(\alpha)$ oppure $q(0) = q_+(\alpha)$: nel primo caso si sceglie la determinazione positiva, mentre nel secondo caso si sceglie la determinazione negativa.

p.71.18 **71.18.** *Osservazione.* La discussione di §71.17 mostra che anche in un caso così semplice la funzione caratteristica di Hamilton è una funzione a più valori. In generale, per sistemi a più gradi di libertà, la variabili (β, α) risultano inadeguate per descrivere il moto.

Per esempio se l'intervallo I (cfr. i commenti dopo la (71.22)) è limitato, i.e. I è della forma $I = [q_-(\alpha), q_+(\alpha)]$, e $V'(q_\pm(\alpha)) \neq 0$, il segno in (71.22) andrà determinato nel modo seguente. Supponiamo per semplicità che sia $q(0) = q_-(\alpha)$ e $p(0) = 0$ scriveremo

$$71.25 \quad \beta = t = \int_{q_0}^{q(t)} dq' p(q'), \quad p(q) = \sqrt{2a(q)(\alpha - V(q))}, \quad (71.25)$$

dove si può scegliere, per esempio, $q_0 = q_-(\alpha)$, e potremo usare tale espressione fino al tempo T_1 in cui di nuovo $p(T_1) = 0$. Dopo tale tempo, per $t > T_1$, scriveremo

$$71.26 \quad \beta = T_1 + \int_{q_+(\alpha)}^{q(t)} dq' (-p(q')), \quad (71.26)$$

e useremo tale espressione fino al tempo T_2 tale che $p(T_2) = 0$ ancora una volta. Dopo tale tempo di nuovo avremo

$$71.27 \quad \beta = T_1 + T_2 + \int_{q_0}^{q(t)} dq' p(q'), \quad (71.27)$$

e si vede quindi che β è definito modulo $T = T_1 + T_2$, con T che rappresenta il periodo del moto unidimensionale.

Se invece I è illimitato a destra, i.e. $I = [q_-(\alpha), +\infty)$, se $p(0) \geq 0$ allora si ha $p(t) > 0$ per ogni $t \geq 0$, e quindi si prende sempre la determinazione positiva. Se invece $p(0) < 0$ si prende la determinazione negativa fino al tempo T_1 in cui si ha $p(T_1) = 0$: da quell'istante in poi si prenderà la determinazione positiva. In questo caso la variabile β è a un sol valore, e quindi non va interpretata come angolo. Analoghe considerazioni valgono se I è illimitato a sinistra.

p.71.19 **71.19.** Supponiamo che, ponendo $q = (q_1, q')$ e $p = (p_1, p')$, con $z' = (q', p') \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$ e $z_1 = (q_1, p_1) \in \mathbb{R}^2$, la hamiltoniana si possa scrivere nella forma

$$71.28 \quad H(p, q) = F(q', p', G_1(q_1, p_1)), \quad (71.28)$$

per opportune funzioni F e G_1 (di classe C^2). Se poniamo $G_1(q_1, p_1) = \alpha_1$, possiamo allora cercare una funzione caratteristica di Hamilton nella forma

$$71.29 \quad W(q, \alpha) = W(q_1, q', \alpha) = W'(q', \alpha) + W_1(q_1, \alpha_1), \quad (71.29)$$

e riscrivere la (71.28) nella forma

$$71.30 \quad \begin{cases} G_1 \left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \right) = \alpha_1, \\ F \left(q', \frac{\partial W'}{\partial q'}, \alpha_1 \right) = \alpha_n, \end{cases} \quad (71.30)$$

dove si è usato il fatto che $\partial W / \partial q' = \partial W' / \partial q'$ e $\partial W / \partial q_1 = \partial W_1 / \partial q_1$

Si può allora risolvere la prima equazione in (71.30), procedendo come nel caso dei sistemi unidimensionali (con la funzione G che gioca il ruolo della hamiltoniana per i sistemi unidimensionali), e quindi, successivamente, studiare la seconda equazione in (71.30), che si può interpretare come equazione di Hamilton-Jacobi per un sistema con $n - 1$ gradi di libertà (per il quale α_1 è un parametro fissato). Ci siamo quindi ricondotti a un sistema con un grado di libertà in meno.

Supponiamo che il procedimento si possa iterare, i.e. che la funzione F sia della forma

$$71.31 \quad F(q', p', \alpha_1) = F(q'', p'', G_2(q_2, p_2, \alpha_1), \alpha_1), \quad (71.31)$$

dove abbiamo posto $q' = (q_2, q'')$ e $p' = (p_2, p'')$, con $z'' = (q'', p'') \in \mathbb{R}^{2(n-2)}$ e $z_2 = (q_2, p_2)$.

Ragionando come nel caso precedente si può porre

$$71.32 \quad W'(q', p') = W''(q'', \alpha) + W_2(q_2, \alpha_2, \alpha_1), \quad (71.32)$$

e riscrivere la (71.28) nella forma

$$71.33 \quad \begin{cases} G_2 \left(q_2, \frac{\partial W_2}{\partial q_2}, \alpha_1 \right) = \alpha_2, \\ F \left(q'', \frac{\partial W''}{\partial q''}, \alpha_2, \alpha_1 \right) = \alpha_n, \end{cases} \quad (71.33)$$

dove si è usato il fatto che $\partial W / \partial q'' = \partial W'' / \partial q''$ e $\partial W / \partial q_2 = \partial W_2 / \partial q_2$.

E così via. Nel caso che il procedimento si possa iterare n volte alla fine avremo scritto la funzione caratteristica nella forma

$$71.34 \quad W(q, \alpha) = \sum_{k=1}^n W_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (71.34)$$

e applicando n volte l'analisi discussa nel caso dei sistemi unidimensionali riusciamo a risolvere completamente l'equazione di Hamilton-Jacobi.

p.71.20 **71.20.** DEFINIZIONE (SISTEMA SEPARABILE.) *Si definisce sistema separabile un sistema hamiltoniano per il quale l'equazione di Hamilton-Jacobi ammette una funzione caratteristica della forma*

$$71.35 \quad W(q, \alpha) = \sum_{k=1}^n W_k(q_k, \alpha), \quad (71.35)$$

con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

p.71.21 **71.21.** Osservazione. L'analisi di §71.19 mostra che si ha un sistema separabile se si può scrivere la hamiltoniana nella forma

$$71.36 \quad H(q, p) = h_N(h_{N-1}(h_{N-2}(\dots h_3(h_2(h_1(z_1), z_2) z_3) \dots z_{N-2}) z_{N-1}) z_N), \quad (71.36)$$

per opportune funzioni h_1, \dots, h_N di classe C^2 . In tal caso la funzione caratteristica sarà della forma (71.34).

p.71.22 **71.22.** DEFINIZIONE (SEPARAZIONE DI VARIABILI.) *Nel caso di sistemi separabili il procedimento che porta a scrivere la funzione caratteristica di Hamilton nella forma (71.34) prende il nome di procedimento di separazione di variabili.*

p.71.23 **71.23.** Osservazione. Se il procedimento descritto in §71.19 non si riesce a iterare fino in fondo ma solo per r passi, con $r < n$, non avremo un sistema separabile. Tuttavia potremo scrivere la funzione caratteristica nella forma

$$71.37 \quad W(q, \alpha) = W(q_{r+1}, \dots, q_n, \alpha) + \sum_{k=1}^r W_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (71.37)$$

dove le funzioni W_1, \dots, W_r sono le funzioni caratteristiche di r sistemi unidimensionali. In particolare questo implica che si sono trovati r integrali primi $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Quindi nelle nuove variabili possiamo scrivere la hamiltoniana come

$$71.38 \quad K(\alpha, \beta) = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n), \quad (71.38)$$

che può essere quindi utilizzata per studiare il sistema a $n-r$ gradi di libertà descritto dalle variabili $(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n)$; cfr. §65.29. Nelle corrispondenti equazioni di Hamilton le variabili $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ appaiono come parametri.

p.71.24 **71.24.** Osservazione. Nel caso dei sistemi unidimensionali si è visto che la variabile β può essere interpretata come angolo. Nel caso di sistemi a più gradi di libertà, anche nel caso in cui questi siano separabili, le variabili β si possono scrivere nella forma

$$71.39 \quad \beta_k = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial \alpha_k}, \quad (71.39)$$

e per ogni i sono possibili due determinazioni, a seconda del segno che si sceglie (cfr. la corrispondente analisi dei sistemi unidimensionali). Tale segno dipenderà dal segno delle variabili p_i , e quindi la determinazione di ciascuna delle β_k cambierà ogni volta che qualcuna delle variabili p_i si annulla. Quindi non è più possibile interpretare le variabili β_k come angoli, perché le variazioni dipendono non solo dai punti iniziali e finali, ma anche dalla traiettoria che li congiunge. In altre parole il moto in ciascuna delle variabili β_k dipende dal moto delle altre variabili $\beta_{k'}$ con $k' \neq k$.

p.71.25 **71.25.** ESEMPIO. Si consideri il sistema descritto dalla hamiltoniana

$$71.40 \quad H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_2^2}{2} + V_2(q_2) \left(\frac{p_1^2}{2} + V_1(q_1) \right), \quad (71.40)$$

e si dimostri che è separabile.

p.71.26 **71.26.** *Discussione dell'esempio 71.25.* Possiamo scrivere la hamiltoniana (71.40) nella forma (71.36), così da ottenere due equazioni della forma (71.30). Quindi possiamo scrivere la funzione caratteristica come

$$71.41 \quad W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) + W_1(q_1, \alpha_1), \quad (71.41)$$

dove

$$71.42 \quad \begin{aligned} W_1(q_1, \alpha_1) &= \pm \int_{q_{01}}^{q_1} dq \sqrt{2(\alpha_1 - V_1(q))}, \\ W_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2) &= \pm \int_{q_{02}}^{q_1} dq \sqrt{2(\alpha_2 - \alpha_1 V_1(q))}, \end{aligned} \quad (71.42)$$

con q_{01} e q_{02} scelti in accordo con la discussione di §71.17.

sec.72

72. Variabili azione-angolo

p.72.1 **72.1. Introduzione.**

p.72.2 **72.2. Sistemi unidimensionali.** Consideriamo il sistema unidimensionale descritto dalla lagrangiana (71.19). Sia la (71.20) la corrispondente hamiltoniana. Supponiamo per semplicità che la funzione $V(q)$ sia convessa. Un esempio è dato dall'oscillatore armonico

$$72.1 \quad H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2. \quad (72.1)$$

Possiamo individuare il punto nello spazio delle fasi dandone le coordinate (q, p) , oppure attraverso il valore di energia $E = H(q, p)$, che fissa la curva di livello nel piano, e l'angolo χ che il raggio vettore che individua il punto (q, p) forma con una direzione prefissata, per esempio con l'asse q . La trasformazione $(q, p) \rightarrow (\chi, E)$ è

ben definita, ma non è una trasformazione canonica. Si può tuttavia costruire una trasformazione canonica, utilizzando la stessa idea di base, nel modo seguente.

Ci proponiamo di costruire quindi una trasformazione di coordinate $(q, p) \rightarrow (\varphi, J)$ tale che J sia una costante del moto e φ un angolo e che si abbia $\{\varphi, J\} = 1$. In particolare deve risultare

$$72.2 \quad H(q, p) = K(J) = E, \quad \oint_{J_\gamma} d\varphi = 2\pi, \quad (72.2)$$

dove K è una opportuna funzione di classe C^2 e γ è la curva di livello di energia E .

Introduciamo a tal fine la seguente funzione generatrice di seconda specie:

$$72.3 \quad F(q, J) = \int_{q_0}^q dq' p(q', K(J)), \quad (72.3)$$

dove

$$72.4 \quad p(q, K(J)) = \pm \sqrt{2(K(J) - V(q))}, \quad (72.4)$$

e la funzione $J \rightarrow K(J)$ è ancora da determinare. D'altra parte vogliamo che sia $K(J) = E$, e quindi K dovrà essere la funzione inversa della funzione $E \rightarrow J = J(E)$, che lega l'energia E con il nuovo momento coniugato J . Quindi vogliamo una funzione K tale che

$$72.5 \quad \frac{\partial K}{\partial J} \neq 0. \quad (72.5)$$

Si noti che, per definizione di funzione generatrice di seconda specie, si deve avere $p = \partial F / \partial q$, quindi occorre (cfr. §70.17)

$$72.6 \quad 0 \neq \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial J} = \frac{\partial p}{\partial J} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(K(J) - V(q))}} \frac{\partial K}{\partial J}, \quad (72.6)$$

quindi la condizione (72.5) appare naturalmente.

La scelta corretta per J risulta essere

$$72.7 \quad J = \frac{1}{2\pi} \oint_{J_\gamma} p dq, \quad (72.7)$$

e se $J = J(E)$ è una trasformazione invertibile allora la trasformazione $(q, p) \rightarrow (\varphi, J)$ che si ottiene dalla funzione generatrice (72.3), con $\varphi = \partial F / \partial J$, definisce una trasformazione canonica.

Inoltre la variabile φ è un angolo. Infatti l'incremento della funzione generatrice F dopo un giro completo lungo la curva γ è dato da

$$72.8 \quad \Delta F = S(J) = \oint_{\gamma} p dq = 2\pi J, \quad (72.8)$$

e, geometricamente, rappresenta l'area racchiusa dalla curva γ nel piano (q, p) . Poiché a ogni giro F aumenta di $\Delta F = S(J)$, si vede che $F(q, J)$ è definita modulo $S(J)$ in q . D'altra parte si ha $p = \partial F / \partial q$, e quindi non varia se modifichiamo F per multipli di $S(J)$. L'incremento della variabile φ dopo un giro è invece dato da (cfr. l'esercizio 5)

$$72.9 \quad \Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial J} \oint_{\gamma} p dq = \frac{\partial S}{\partial J} = 2\pi, \quad (72.9)$$

quindi φ è effettivamente un angolo che ruota di 2π dopo un giro completo.

p.72.3 **72.3. Osservazione.** Le variabili (J, φ) costituiscono le variabili azione-angolo del sistema unidimensionale considerato. La trasformazione $(q, p) \rightarrow (\varphi, J)$ è canonica (quindi $\{\varphi, J\} = 1$) per costruzione dal momento che è stata ottenuta attraverso un procedimento di seconda specie

La definizione si estende immediatamente al caso di sistemi unidimensionali qualsiasi, purché ci si limiti a orbite chiuse nel piano (q, p) , oppure a orbite periodiche sul cilindro $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, dove $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ è il *toro unidimensionale*.

p.72.4 **72.4. DEFINIZIONE (VARIABILI AZIONE-ANGOLO).** Consideriamo un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà, descritto dalle coordinate canoniche (φ, J) , tali che le variabili J_1, \dots, J_n sono integrali primi, mentre le variabili $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono tali che lasciando variare solo φ_k e fissando le altre $\varphi_{k'}, k' \neq k$, allora φ_k torna al valore iniziale dopo una variazione $\Delta\varphi_k = 2\pi$. Chiameremo allora variabili azione-angolo le variabili (J, φ) .

p.72.5 **72.5. Osservazione.** La definizione 72.4 mostra che la definizione di variabili azione-angolo si può estendere facilmente al caso a più gradi di libertà. Quello che diventa difficile è, come vedremo, investigare in quali condizioni sia possibile descrivere effettivamente il moto di un sistema a più gradi di libertà in termini di variabili azione-angolo. Questo in generale non è possibile, a meno di non fare opportune ipotesi sul sistema stesso.

p.72.6 **72.6.**

p.72.7 **72.7.**

p.72.9 **72.8. TEOREMA (ARNOL'D-LIOUVILLE).** Si consideri un sistema a n gradi di libertà indipendente dal tempo. Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi.

(1) Esistono n integrali primi F_1, \dots, F_n di classe C^2 in involuzione, i.e. tali che $\{F_i, F_j\} = 0$ per $i, j = 1, \dots, n$.

(2) La superficie

$$72.10 \quad M_f = \{z \in \mathbb{R}^{2n} : F_k(z) = f_k \text{ per } k = 1, \dots, n\}, \quad (72.10)$$

con $f = (f_1, \dots, f_n)$, è una superficie regolare, i.e. i vettori $\partial F_1 / \partial z, \dots, \partial F_n / \partial z$ sono linearmente indipendenti per $z \in M_f$.

(3) La superficie M_f è compatta e connessa.

In tale caso valgono i seguenti risultati.

(i) La superficie M_f è diffeomorfa a un toro n -dimensionale.

(ii) Esiste un intorno \mathcal{F} di f tale che l'insieme

$$72.11 \quad M_{\mathcal{F}} = \bigcup_{f' \in \mathcal{F}} M_{f'} \quad (72.11)$$

è diffeomorfo a $\mathcal{F} \times M_f$. Inoltre esistono in $M_{\mathcal{F}}$ coordinate canoniche (φ, J) , dove le J sono funzioni delle sole f e (J, φ) sono variabili azione-angolo, nel senso della Definizione 72.4.

p.72.10 **72.9. Osservazione.** Il caso $n = 1$ è banale: è quello descritto in §72.2.

p.72.11 **72.10. Osservazione.** Dire che M_f è diffeomorfo a un toro n -dimensionale significa che si può parametrizzare (in modo differenziabile) con n variabili angolari, i.e. se $z = (z_1, \dots, z_n)$ rappresentano le coordinate di un punto in M_f allora $z = z(\theta_1, \dots, \theta_n)$, dove $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{T}^n$. In termini di tali angoli $\theta_1, \dots, \theta_n$ il moto ha n periodi. In generale i periodi sono incommensurabili: in tal caso il moto è detto *moto quasiperiodico*.

p.72.12 **72.11. Osservazione.** Che la superficie debba essere compatta si vede già in casi semplici. Se si considera un punto libero in \mathbb{R}^3 esistono tre integrali primi in involuzione (le tre componenti della quantità di moto), ma il moto è nello spazio, i.e. non su un toro tridimensionale. La richiesta che la superficie sia connessa è invece meno forte: se non lo è ci si può restringere a una sua componente connessa.

p.72.13 **72.12. DEFINIZIONE (MOTO MULTIPERIODICO).** Un moto sulla superficie M_f si dice multiperiodico. Si chiamano frequenze del moto multiperiodico le frequenze con cui variano le variabili angolari.

p.72.14 **72.13. Dimostrazione (in un caso semplice).** Diamo qui la dimostrazione del teorema nel caso (particolarmente) semplice in cui il sistema sia separabile, le funzioni $h_k(q_k, p_k, \dots)$ in (71.27) dipendano quadraticamente dalle variabili p_k , e i moti unidimensionali siano periodici. Il caso generale sarà discusso in §73.

Sotto le ipotesi fatte possiamo cercare la funzione caratteristica di Hamilton nella forma

$$72.12 \quad W(q, \alpha) = \sum_{k=1}^n W_k(q_k, \alpha), \quad (72.12)$$

dove la funzione W_k risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi unidimensionale

$$72.13 \quad G_k(q_k, \alpha) \equiv p_k^2 + V_k(q_k, \alpha) = \alpha_k, \quad p_k = \frac{\partial W_k}{\partial q_k}, \quad (72.13)$$

e quindi possiamo esprimere le variabili α in termini delle variabili d'azione, $\alpha = K(J)$, con

$$72.14 \quad J_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k} p_k dq_k = \frac{1}{\pi} \int_{q_{k,-}(\alpha)}^{q_{k,+}(\alpha)} dq \sqrt{\alpha_k - V_k(q, \alpha)}, \quad (72.14)$$

dove γ_k è la curva descritta dal moto unidimensionale $t \rightarrow (q_k(t), p_k(t))$ ottenuto fissando tutte le variabili tranne le k -esime, i.e. la curva ottenuta esplicitando in (72.13) la variabile p_k in termini di q_k . Quindi $q_{k,-}(\alpha)$ e $q_{k,+}(\alpha)$ sono i due zeri dell'equazione $\alpha_k - V(q, \alpha) = 0$.

La funzione generatrice della trasformazione $(q, p) \rightarrow (\varphi, J)$ diventa

$$72.15 \quad F(q, \alpha(J)) = \sum_{k=1}^n F_k(q_k, K(J)), \quad (72.15)$$

così che, in termini della variabili azione-angolo, le equazioni del moto sono (cfr. l'esercizio 6)

$$72.16 \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_k = \omega_k(J) \equiv \frac{\partial \alpha_n}{\partial J_k}, & k = 1, \dots, n, \\ \dot{J}_k = 0, & k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (72.16)$$

dove $\omega(J) = (\omega_1(J), \dots, \omega_n(J))$ definisce il vettore delle frequenze delle variabili angolari.

La variazione della variabile φ_k lungo una curva γ_j , i.e. in corrispondenza del moto in cui le variabili (q_j, p_j) si muovano lungo la curva γ_j e le altre variabili non cambino, è data da

$$72.17 \quad \begin{aligned} \oint_{\gamma_j} d\varphi_k &= \oint_{\gamma_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial J_i} dJ_i \right) \\ &= \oint_{\gamma_j} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j} dq_j = \oint_{\gamma_j} \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial J_k} dq_j, \end{aligned} \quad (72.17)$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\varphi_k = \partial F / \partial J_k$ è vista come funzione di (q, J) , e si è utilizzato il fatto che per il moto considerato si ha $dJ_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e $dq_i = 0$ per ogni $i \neq j$. Quindi (cfr. l'esercizio 7)

$$72.18 \quad \oint_{\gamma_j} d\varphi_k = \frac{\partial}{\partial J_k} \oint_{\gamma_j} \frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_k} \oint_{\gamma_j} p_j dq_j = 2\pi \frac{\partial J_j}{\partial J_k} = 2\pi \delta_{jk}, \quad (72.18)$$

ovvero, dopo un giro completo della curva γ_j , la variabile φ_j varia di 2π , mentre tutti gli altri angoli non cambiano. Quindi φ_j è l'angolo che parametrizza la curva γ_j . ■

p.72.15 **72.14. Osservazione.** La dimostrazione è immediatamente generalizzabile al caso in cui invece della (72.13) si abbia

$$72.19 \quad F_k(q_k, \alpha) = a_k(q_k, \alpha) p_k^2 + V_k(q_k, \alpha) = \alpha_k, \quad (72.19)$$

con $a_k > 0$. Semplicemente la curva γ_k si ottiene esplicitando p_k in funzione di q_k come

$$72.20 \quad p_k = \pm \sqrt{\frac{2(\alpha_k - V_k(q_k, \alpha))}{a_k(q_k, \alpha)}}, \quad (72.20)$$

e per il resto si procede come prima.

p.72.16 **72.15. Osservazione.** Altra estensione banale è quella al caso in cui q_k è un angolo (e quindi lo spazio delle fasi è un cilindro) e la curva γ_k si raccorda ai lati del cilindro (cfr. l'osservazione 72.3). In tal caso si ha

$$72.21 \quad J_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_k dq_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \sqrt{\alpha - V(q, \alpha)}, \quad (72.21)$$

e rappresenta l'area sottesa al grafico di p_k .

p.72.17 **72.16. Osservazione.** Le frequenze del moto multiperiodico sono date da

$$72.22 \quad \omega_k(J) = \frac{\partial \alpha_n}{\partial J_k} = (A^{-1})_{nk}, \quad A_{ij} = \frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j}. \quad (72.22)$$

e quindi si trovano immediatamente una volta che sia nota la dipendenza di J dalle costanti α .

Per esempio se $n = 2$, nel caso di un sistema separabile con funzione caratteristica (71.34), si ha

$$72.23 \quad A \equiv \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} & 0 \\ \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} \end{pmatrix}, \quad (72.23)$$

e quindi

$$72.24 \quad \det A = \det \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}, \quad (72.24)$$

da cui si ricava

$$72.25 \quad A^{-1} = \frac{\partial \alpha}{\partial J} = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & 0 \\ -\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix}. \quad (72.25)$$

In conclusione si ottiene

$$72.26 \quad \omega_1 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_1} = -\frac{\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}}, \quad (72.26)$$

$$\omega_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_2} = \frac{1}{\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}},$$

che rappresentano le frequenze del moto multiperiodico. Se $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$ allora il moto complessivo è periodico, altrimenti è quasiperiodico (cfr. l'osservazione 72.10).

sec.73

73. Dimostrazione del teorema di Arnol'd-Liouville

p.73.1 **73.1. Preliminari.** Indichiamo con ξ_i il campo vettoriale con componenti $h_{ik} = (E\partial F_i/\partial z)_k$ e poniamo $h_i = (h_{i1}, \dots, h_{in})$. Indichiamo con $\varphi_i(t, x)$ i corrispondenti flussi: per costruzione $\varphi_i(t, \bar{x})$ è soluzione dell'equazione $\dot{x} = h_i(x)$ con dato iniziale \bar{x} . Introduciamo per comodità la notazione $\Phi_i^t(x) = \varphi_i(t, x)$.

La superficie M_f è invariante per ciascuno dei flussi hamiltoniani Φ_i^t . Infatti, fissato i , si ha $\{F_i, F_j\} = 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$, quindi tutte le funzioni F_j sono integrali primi per il flusso hamiltoniano Φ_i^t (cfr. l'osservazione 68.6). In particolare, i campi vettoriali ξ_1, \dots, ξ_n sono tangenti alla superficie M_f .

Per $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, consideriamo l'applicazione $\Phi^t: M_f \rightarrow M_f$ definita da

73.1
$$\Phi^t = \Phi_n^{t_n} \circ \dots \circ \Phi_1^{t_1}. \tag{73.1}$$

Il fatto che le funzioni F_i siano in involuzione implica che i flussi $\Phi_1^{t_1}, \dots, \Phi_n^{t_n}$ commutano tra loro. Infatti $\{F_i, F_j\} = 0$ implica $[\xi_i, \xi_j] = 0$ per la (68.3), e questo a sua volta implica $\Phi_i^{t_i} \circ \Phi_j^{t_j} = \Phi_j^{t_j} \circ \Phi_i^{t_i}$ per il teorema 58.11. Quindi l'applicazione (73.1) non dipende dall'ordine in cui i flussi sono composti.

Si noti che Φ^t definisce un gruppo commutativo a n parametri (cfr. l'esercizio 8).

p.73.2 **73.2. DEFINIZIONE (CILINDRO).** Definiamo $\mathcal{C}_{n,k}$ il cilindro $\mathcal{C}_{n,k} := \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, con la convenzione che $\mathcal{C}_{n,n} = \mathbb{T}^n$ e $\mathcal{C}_{n,0} = \mathbb{R}^n$.

p.73.3 **73.3. LEMMA.** Sia \mathcal{G} un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n . Esistono k vettori linearmente indipendenti $e_1, \dots, e_k \in \mathcal{G}$, con $k \leq n$, tali che

73.2
$$\mathcal{G} = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i e_i : m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{73.2}$$

i.e. tutti i vettori di \mathcal{G} si possono scrivere come combinazioni lineari intere dei vettori e_1, \dots, e_k .

p.73.4 **73.4. Dimostrazione.** Sia E il più piccolo sottospazio di \mathbb{R}^n tale che $\mathcal{G} \subset E$. Sia $k = \dim(E)$. Allora esistono k vettori linearmente indipendenti e_1, \dots, e_k in \mathbb{R}^n tali che ogni elemento $t \in \mathcal{G}$ si può scrivere come loro combinazione lineare, i.e.

73.3
$$t = \sum_{i=1}^k \mu_i e_i, \quad \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}. \tag{73.3}$$

Sia $\mathcal{E} = \mathcal{E}(e_1, \dots, e_k) \subset E$ il parallelogramma che ha vertice nell'origine ed è generato da e_1, \dots, e_k . Chiameremo \mathcal{E} una *cella*.

Vogliamo dimostrare che esiste una *cella elementare*, i.e. una cella \mathcal{E} che non contiene altri elementi di \mathcal{G} oltre i suoi vertici. Infatti, dimostrata tale proprietà, dato $t = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_k e_k \in \mathcal{G}$ possiamo considerare l'elemento $t' = (\mu_1 - [\mu_1])e_1 + \dots + (\mu_k - [\mu_k])e_k$, dove $[\cdot]$ indica la parte intera. Tale elemento è per costruzione all'interno di \mathcal{E} , quindi deve coincidere con l'origine: di conseguenza $\mu_i = [\mu_i]$, ovvero $\mu_i \in \mathbb{Z}$.

Dimostriamo dunque che esiste una cella elementare. Più esattamente dimostriamo per induzione che per ogni $1 \leq p \leq k$ esiste una cella elementare $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_p)$ per $\mathcal{G} \cap E_p$, dove E_p è il sottospazio generato da e_1, \dots, e_p . Per $p = 1$, il sottospazio E_1 è una retta, e si può prendere come e_1 uno dei due elementi di \mathcal{G} con distanza minima dall'origine: in tal caso $\mathcal{E}(e_1)$ costituisce una cella elementare.

Assumiamo ora che l'asserto sia vero per $p - 1$ e verifichiamo che allora segue anche per p . Siano $u_1, \dots, u_p \in \mathcal{G}$ vettori linearmente indipendenti di \mathbb{R}^n , e sia E_{p-1} il sottospazio generato da u_1, \dots, u_{p-1} . Poniamo $\mathcal{G}_{p-1} = \mathcal{G} \cap E_{p-1}$: allora \mathcal{G}_{p-1} è un gruppo discreto. Quindi, per l'ipotesi induttiva, esistono $p - 1$ vettori e_1, \dots, e_{p-1} tali che $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_{p-1})$ è una cella elementare per \mathcal{G}_{p-1} . Si vede subito che

$$73.4 \quad \text{dist}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_{p-1}, E_{p-1}) := \inf \{ \text{dist}(t, E_{p-1}) : t \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_{p-1} \} \quad (73.4)$$

è diverso da zero (cfr. l'esercizio 9). Inoltre il volume delle celle assume valori discreti, i.e. non può cambiare con continuità. Infatti se, per $t_1, t_2 \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_{p-1}$ tali che $t_1 \neq t_2$, le due celle $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_{p-1}, t_1)$ ed $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_{p-1}, t_2)$ avessero volumi arbitrariamente vicini (ma distinti), allora la cella $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_{p-1}, t_1 - t_2)$ avrebbe volume arbitrariamente piccolo, mentre il fatto che $\text{dist}(\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_{p-1}, E_{p-1}) > 0$ esclude che questo possa accadere.

Concludendo, esiste $e_p \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_{p-1}$ tale che $\mathcal{E}(e_1, \dots, e_p)$ ha volume minimo e, quindi, non può contenere punti di \mathcal{G} diversi dai vertici. ■

p.73.5 **73.5. TEOREMA.** *Sia M una varietà n -dimensionale connessa. Se esistono n campi vettoriali ξ_1, \dots, ξ_n , tangenti a M , linearmente indipendenti e con prodotto di Lie nullo (i.e. tali che $[\xi_i, \xi_j] = 0$ per ogni $i \neq j$), allora esiste un intero $k \leq n$ tale che M è diffeomorfo al cilindro $\mathcal{C}_{n,k}$.*

p.73.6 **73.6. Dimostrazione.** La dimostrazione si articola nei seguenti passi. (i) Prima si trova un opportuno diffeomorfismo locale $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow M$. (ii) Si fa poi vedere che Ψ è suriettivo. (iii) Quindi si verifica che o Ψ è iniettivo o si può introdurre un'opportuna classe di equivalenza tale che il quoziente $\tilde{\Psi}$ è iniettivo. Di conseguenza $\tilde{\Psi}$, essendo un diffeomorfismo locale biiettivo, è un diffeomorfismo. (iv) Infine, componendo $\tilde{\Psi}$ con un opportuno cambiamento di coordinate \tilde{A} , si ottiene un diffeomorfismo $\tilde{\Psi} \circ \tilde{A}$ il cui dominio è $\mathcal{C}_{k,n}$ per qualche intero $k \leq n$.

(i) Fissato (arbitrariamente) $x \in M$, definiamo l'applicazione $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow M$ data da

$$73.5 \quad \Psi(t) = \Psi_x(t) = \Phi^t(x). \quad (73.5)$$

Vogliamo far vedere che Ψ è un diffeomorfismo locale, i.e. è un'applicazione regolare e invertibile che trasforma un intorno U di $t = 0$ in un intorno $V(x)$ di x . Per questo basta osservare che $\Psi(0) = x$ e

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial \Phi^t(x)}{\partial t_i} = h_i(\Phi^t(x)) = h_i(\Psi(t)),$$

dove h_i sono le componenti del campo vettoriale ξ_i , e ricordare che i campi vettoriali ξ_1, \dots, ξ_n sono linearmente indipendenti per ipotesi.

(ii) Per far vedere che Ψ è suriettivo, si consideri un punto $y \neq x$ in M , e sia γ una curva qualsiasi che unisca i due punti; cfr. la figura 73.1. Quindi $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ è una funzione continua tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$. Per ogni $z \in \gamma$ esiste un intorno $V(z)$ e un diffeomorfismo locale Ψ_z tale che Ψ_z trasforma l'intorno U di $t = 0$ nell'intorno $V(z)$ di z (ragionando come al punto (i)). Per compattezza possiamo quindi fissare un numero finito di intorni V_1, \dots, V_N che si intersecano a due a due e che ricoprono γ . In particolare si può fissare una catena finita di punti $z_0 = x, z_1, z_2, \dots, z_N = y$ tali che $z_k \in V_k \cap V_{k+1}$ per $k = 1, \dots, N - 1$. Inoltre esistono $t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}^n$ tali che $z_k = \Phi^{t_k}(z_{k-1})$ per $k = 1, \dots, N$, di nuovo per l'argomento visto al punto (i). Se definiamo $t = t_1 + \dots + t_N$ si trova allora $y = \Phi^t(x) = \Psi(t)$, che dimostra la suriettività di Ψ .

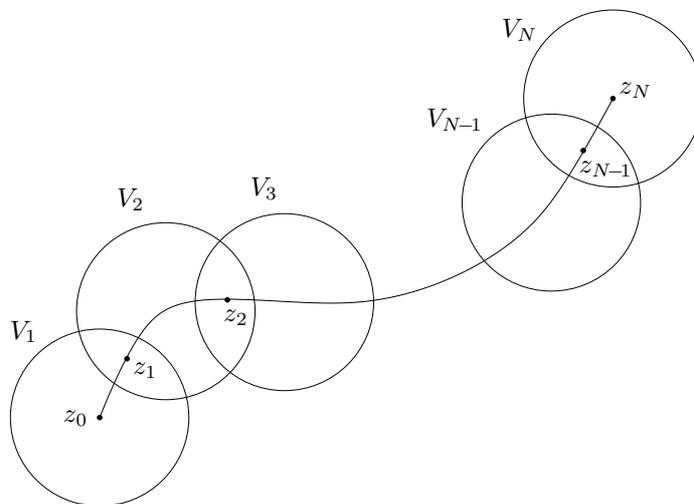


FIGURA 73.1. Catena di intorni lungo la curva che collega il punto $x = z_0$ al punto $y = z_N$. Per ogni $k = 1, \dots, N - 1$ si ha $z_k \in V_k \cap V_{k+1}$.

(iii) Se Ψ è iniettivo il teorema è dimostrato con $k = 0$. Assumiamo quindi che Ψ non sia iniettivo. Definiamo l'insieme dei periodi

$$\mathcal{T} = \{T \in \mathbb{R}^n : \Phi^T(x) = x\}. \tag{73.6}$$

Si vede subito che \mathcal{T} è un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n e che non dipende da x (cfr. l'esercizio 10).

Introduciamo la relazione di equivalenza \sim ponendo $t \sim t'$ se $t - t' \in \mathcal{T}$, e prendiamo il quoziente di \mathbb{R}^n secondo tale relazione di equivalenza: indichiamo il quoziente $\tilde{\mathcal{Q}} = \mathbb{R}^n / \mathcal{T}$. Definiamo infine l'applicazione quoziente

$$73.7 \quad \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_x := \Psi_x / \mathcal{T} : \tilde{\mathcal{Q}} \rightarrow M, \quad (73.7)$$

che è dunque iniettiva per costruzione.

(iv) Per il Lemma 73.3 gli elementi di $\mathcal{G} = \mathcal{T}$ si possono scrivere nella forma (73.2) per qualche $k \leq n$ e per opportuni e_1, \dots, e_k . Se $k < n$ si fissino $n - k$ vettori e_{k+1}, \dots, e_n in modo tale che $\{e_1, \dots, e_n\}$ costituisca una base in \mathbb{R}^n . Definiamo il cambiamento di coordinate lineare $t \rightarrow \varphi$, ponendo

$$73.8 \quad t = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \varphi_i e_i, \quad (73.8)$$

che può essere scritta per componenti nella forma

$$73.9 \quad t_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n A_{ij} \varphi_j, \quad A_{ij} = (e_j)_i. \quad (73.9)$$

Chiameremo A la *matrice dei periodi*: A_{ij} indica di quanto varia t_i quando φ_j varia di 2π . In particolare se $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sono multipli di 2π , mentre $\varphi_{k+1} = \dots = \varphi_n = 0$, si ottengono i periodi, i.e. gli elementi di \mathcal{T} .

Definiamo l'applicazione $\tilde{A} : \mathcal{C}_{n,k} \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$ che associa a $\varphi \in \mathcal{C}_{k,n}$ il vettore $t \in \tilde{\mathcal{Q}}$. L'applicazione $\tilde{\Psi} \circ \tilde{A} : \mathcal{C}_{n,k} \rightarrow M$ costituisce allora un diffeomorfismo tra il cilindro $\mathcal{C}_{n,k}$ e la varietà M . ■

p.73.7 **73.7.** *Dimostrazione del punto (i) del teorema 72.8.* Che M_f sia diffeomorfo a \mathbb{T}^n (i.e. il punto (i) del teorema 72.8) segue dunque dal teorema 73.5, notando che, se si assume che la varietà M sia compatta, allora necessariamente si deve avere $n = k$, e quindi M è diffeomorfa a $\mathcal{C}_{n,n} = \mathbb{T}^n$. Per completare la dimostrazione del teorema 72.8, dobbiamo dunque ancora verificare il punto (ii) dell'enunciato.

p.73.8 **73.8.** *Interludio.* Nel seguito indichiamo con f_* il valore f fissato nell'enunciato del teorema 72.8, e con f i valori nell'intorno \mathcal{F} di f_* .

Data una superficie M_1 di dimensione m_1 in \mathbb{R}^m , diremo che la superficie M_2 è trasversa a M_1 in un suo punto x se $m_2 = \dim(M_2) = m - m_1$ e gli spazi tangenti $T_x M_1$ e $T_x M_2$ generano \mathbb{R}^m . Sia Σ una superficie n -dimensionale trasversa a M_{f_*} nel punto x_* . Se l'intorno \mathcal{F} di f_* è sufficientemente piccolo, la superficie Σ interseca M_f in un solo punto $y(f)$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ (cfr. l'esercizio 11). Inoltre per ogni $f \in \mathcal{F}$ i vettori $\partial F_1 / \partial z, \dots, \partial F_n / \partial z$ sono linearmente indipendenti (per continuità). La costruzione

effettuata nei paragrafi precedenti si può perciò ripetere per ogni $f \in \mathcal{F}$: in particolare l'insieme $\mathcal{T} = \mathcal{T}(f)$, e quindi la matrice dei periodi introdotta in (73.9), dipende in modo regolare da $f \in \mathcal{F}$ (cfr. l'esercizio 12). Si trova quindi un sistema di coordinate (t, f) in $M_{\mathcal{F}}$ e un'applicazione suriettiva $\mathcal{W}: \mathcal{S} \rightarrow M_{\mathcal{F}}$, dove $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n \times \mathcal{F}$, che è periodica in t e ha come periodi gli elementi di $\mathcal{T} = \mathcal{T}(f)$: basta ripetere la costruzione di §73.6 per ogni $f \in \mathcal{F}$. Per costruzione si ha $\mathcal{W}(t, f) = \Phi^t(y(f))$, quindi \mathcal{W} è un diffeomorfismo locale (cfr. l'esercizio 13).

Definiamo l'insieme $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}/\mathcal{T}(f)$ e l'applicazione $\tilde{\mathcal{W}}: \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow M_{\mathcal{F}}$. Per ogni $f \in \mathcal{F}$ si possono introdurre le variabili φ come fatto prima per $f = f_*$ (cfr. il punto (iv) di §73.6), definendo l'applicazione $\tilde{\mathcal{A}}: (\varphi, f) \in \mathcal{C}_{n,k} \times \mathcal{F} \rightarrow (t, f) \in \tilde{\mathcal{S}}$. In conclusione, si ottiene quindi un'applicazione $\tilde{\mathcal{W}} \circ \tilde{\mathcal{A}}: \mathbb{T}^n \times \mathcal{F} \rightarrow M_{\mathcal{F}}$.

Nelle nuove variabili il flusso hamiltoniano associato a F_i è tale che

$$73.10 \quad \dot{f}_k = 0, \quad \dot{t}_k = \delta_{k,i}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (73.10)$$

si hanno cioè le equazioni di Hamilton con hamiltoniana $F_i(\varphi, f) = f_i$. In altre parole, il flusso hamiltoniano associato a ogni F_i , per $i = 1, \dots, n$, è trasformato in un flusso hamiltoniano. Ma ovviamente questo non è sufficiente per concludere che la trasformazione sia canonica: infatti perché la trasformazione fosse canonica occorrerebbe che la stessa proprietà fosse soddisfatta per qualsiasi funzione hamiltoniana, e non solo per n hamiltoniane speciali.

Il problema con la trasformazione di coordinate appena costruita è proprio che, in generale, non è canonica. Per ottenere una trasformazione canonica bisognerà fissare la superficie Σ (ovvero l'origine dei tempi t per f fissato) in modo opportuno: faremo allora un passo indietro e saremo più attenti nel modo in cui costruire le variabili (t, f) .

p.73.9 **73.9. LEMMA.** *Siano F_1, \dots, F_n in involuzione tra di loro. Se i vettori $\partial F_1/\partial z, \dots, \partial F_n/\partial z$ sono linearmente indipendenti in un punto $x_* \in M_f$, allora esiste in un intorno di x_* un sistema di coordinate canoniche (q, p) tali che*

$$73.11 \quad \det \frac{\partial F_i}{\partial p_j}(x_*) \neq 0. \quad (73.11)$$

Quindi in tale intorno risulta ben definita una funzione $p = P(q, f)$ tale che $F_i(q, P(q, f)) = f_i$ per $i = 1, \dots, n$.

p.73.10 **73.10. Dimostrazione.** Innanzitutto osserviamo che la condizione che i vettori $\partial F_1/\partial z, \dots, \partial F_n/\partial z$ siano linearmente indipendenti in x_* è equivalente a dire che

$$73.12 \quad \text{rango} \left(\frac{\partial F_i}{\partial (q_j, p_j)} \right) = n. \quad (73.12)$$

Nel seguito omettiamo x_* nelle notazioni, intendendo che tale punto sia fissato una volta per tutte, e quindi tutte le derivate siano calcolate in x_* .

Definiamo

$$73.13 \quad r = \text{rango} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \right). \quad (73.13)$$

Se $r = n$ segue l'asserto. Supponiamo quindi che si abbia $r = k < n$. Consideriamo una trasformazione canonica, lineare nelle p e opportunamente completata nelle q , tale che nelle nuove variabili (che continuiamo a indicare con (q, p)) si possa scrivere

$$73.14 \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial(q_j, p_j)} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial F_i}{\partial(q_1, \dots, q_k)} & \frac{\partial F_i}{\partial(q_{k+1}, \dots, q_n)} & \frac{\partial F_i}{\partial(p_1, \dots, p_k)} & 0 \end{array} \right). \quad (73.14)$$

Consideriamo la matrice Z ottenuta dalla (73.14) eliminando le prime k e le ultime $n - k$ colonne, e studiamone il determinante. Ovviamente il determinante non cambia se sostituiamo ad alcune righe delle loro combinazioni lineari: possiamo interpretare tale sostituzioni dicendo che ad alcune F_i sostituiamo delle combinazioni lineari delle funzioni stesse; le nuove funzioni, che continuiamo a indicare con le stesse lettere, saranno ovviamente ancora in involuzione. In conclusione, con tali sostituzioni, possiamo mettere la matrice (73.14) nella forma

$$73.15 \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial(q_j, p_j)} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & R & 0 \\ C & D & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (73.15)$$

dove A, B, C, D ed R sono opportuni blocchi; più precisamente si ha $R_{ij} = \partial F_i / \partial p_j$ per $i, j = 1, \dots, k$, e, inoltre, $A_{ij} = \partial F_i / \partial q_j$ per $i, j = 1, \dots, k$, $B_{ij} = \partial F_i / \partial q_j$ per $i = 1, \dots, k$ e $j = k + 1, \dots, n$, $C_{ij} = \partial F_i / \partial q_j$ per $i = k + 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$, e $D_{ij} = \partial F_i / \partial q_j$ per $i = k + 1, \dots, n$ e $j = k + 1, \dots, n$.

Si ha quindi, in particolare,

$$73.16 \quad Z = \left(\begin{array}{cc} B & R \\ D & 0 \end{array} \right). \quad (73.16)$$

In tali coordinate risulta inoltre, per $1 \leq i \leq k$ e $k + 1 \leq j \leq n$ (cfr. l'esercizio 14),

$$73.17 \quad 0 = \{F_i, F_j\} = - \sum_{m=1}^k \frac{\partial F_i}{\partial p_m} \frac{\partial F_j}{\partial q_m} = - \sum_{m=1}^k R_{im} C_{jm}, \quad (73.17)$$

ovvero i vettori ottenuti prendendo una riga qualsiasi di R e una riga qualsiasi di C sono ortogonali tra loro. D'altra parte $\det R \neq 0$ poiché in (73.13) si ha $r = k$. Quindi la matrice C deve essere nulla. Poiché il rango della matrice (73.15) è n , per l'ipotesi (73.12), si deve quindi avere $\det Z \neq 0$.

Infine, con un'ulteriore trasformazione canonica, possiamo scambiare tra loro le p_i e le q_i per $i = k + 1, \dots, n$ (cfr. l'esercizio 42 del Capitolo 17). Questo dimostra che vale la (73.11) in opportune coordinate locali.

La condizione (73.11) permette di applicare il teorema della funzione implicita ed esplicitare p in funzione di q e di f . In altre parole esiste una funzione P tale che

$$73.18 \quad p_i = P_i(q, f), \quad F_i(q, P(q, f)) = f_i, \quad (73.18)$$

per ogni $i = 1, \dots, n$. Questo dimostra l'ultima affermazione del lemma. ■

p.73.11 **73.11.** LEMMA. *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 72.8. La forma differenziale $\langle p, dq \rangle$ è chiusa su ogni superficie M_f per $f \in \mathcal{F}$.*

p.73.12 **73.12.** Dimostrazione. Sia P la funzione definita nel Lemma 73.9, e scriviamo $p = P(q, f)$. La forma $\langle p, dq \rangle$ è quindi chiusa se e solo se

$$73.19 \quad \frac{\partial P_i}{\partial q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (73.19)$$

D'altra parte derivando rispetto a q le identità $F_k(q, P(q, f)) = f_k$ per $k = 1, \dots, n$, si trova

$$\frac{dF_k}{dq_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_j} + \frac{\partial F_k}{\partial q_j} = 0, \quad k, j = 1, \dots, n,$$

che permette di scrivere

$$73.20 \quad \frac{\partial F_k}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_j}. \quad k, j = 1, \dots, n. \quad (73.20)$$

Il fatto che le funzioni F_1, \dots, F_n siano in involuzione implica

$$73.21 \quad 0 = \{F_k, F_m\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_k}{\partial q_j} \frac{\partial F_m}{\partial p_j} - \frac{\partial F_k}{\partial p_j} \frac{\partial F_m}{\partial q_j} \right). \quad k, m = 1, \dots, n. \quad (73.21)$$

Scrivendo $\partial F_k / \partial q_j$ e $\partial F_m / \partial q_j$ in (73.21) secondo la (73.20), troviamo

$$73.22 \quad \begin{aligned} 0 &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial F_m}{\partial p_j} \right) - \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial F_k}{\partial p_j} \frac{\partial F_m}{\partial p_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial p_i} \frac{\partial F_m}{\partial p_j} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right), \end{aligned} \quad (73.22)$$

avendo scambiato tra loro gli indici di somma i, j nella seconda somma alla prima riga. In virtù della (73.11) la (73.22) è equivalente alla (73.19) (cfr. l'esercizio 15). ■

p.73.13 **73.13.** LEMMA. *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 72.8. Indichiamo con (q, p) le coordinate locali in un intorno di $x_* \in M_{f_*}$ e con P la funzione che inverte localmente le F_1, \dots, F_n rispetto alle p data dal Lemma 73.9. Poniamo $x_* = (q_*, p_*)$ e consideriamo*

$$73.23 \quad S(q, f) = \int_{\gamma} \langle P(q', f), dq' \rangle, \quad (73.23)$$

dove γ è un qualsiasi cammino su M_f che unisce il punto q_* al punto q . Allora $S(q, f)$ è la funzione generatrice di una trasformazione canonica locale $\mathcal{Z}: (t, f) \rightarrow (q, p)$.

p.73.14 **73.14.** *Dimostrazione.* Per il Lemma 73.11 l'integrale (73.23) non dipende dal cammino γ . Quindi la funzione (73.23) è ben definita. Inoltre si ha

$$73.24 \quad \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial f_j} \right) = \det \left(\frac{\partial P_i}{\partial f_j} \right) = \det \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial P_j} \right)^{-1} \right) \neq 0 \quad (73.24)$$

per il Lemma 73.9. Quindi $S(q, f)$ può essere utilizzata come funzione generatrice di seconda specie. La trasformazione canonica corrispondente $\mathcal{Z}: (g, f) \rightarrow (q, p)$ è definita da

$$73.25 \quad \begin{cases} p = P(q, f), \\ g = \int_{\gamma} \left\langle \frac{\partial P}{\partial f}(q', f), dq' \right\rangle. \end{cases} \quad (73.25)$$

La hamiltoniana F_i nelle nuove variabili (g, f) diventa

$$73.26 \quad \tilde{F}_i = f_i, \quad (73.26)$$

e quindi le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$73.27 \quad \dot{f}_k = 0, \quad \dot{g}_k = \delta_{k,i}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (73.27)$$

Inoltre si ha $g = 0$ per $t = 0$ (infatti $(g, f) = (0, f_*)$ corrisponde al punto (q_*, p_*)), quindi, applicando il flusso Φ^t , si trova $g_k = t_k$ per $k = 1, \dots, n$. In conclusione le coordinate g coincidono con le coordinate t . ■

p.73.15 **73.15.** *Dimostrazione del punto (ii) del teorema 72.8.* Sia $x_* \in M_{f_*}$. Poniamo $x_* = (q_*, p_*)$ e definiamo $y(f) = (q_*, P(q_*, f))$. In particolare $y(f_*) = x_*$. Consideriamo come superficie Σ trasversa a M_{f_*} in x_* la superficie parametrizzata dalla funzione $y(f)$ così definita.

Per il Lemma 73.13 esiste una trasformazione canonica $\mathcal{Z}: (t, f) \rightarrow (q, p)$ che trasforma un intorno U_* di $(0, f_*)$ in un intorno V_* del punto (q_*, p_*) . Inoltre si ha $\mathcal{Z} = \mathcal{W}_* := \mathcal{W}|_{U_*}$, dove $\mathcal{W}(t, f) = \Phi^t(y(f))$ è la funzione definita in §73.8, con la scelta appena descritta di $y(f)$. In altre parole \mathcal{Z} coincide con la restrizione di \mathcal{W} all'intorno U_* .

Vogliamo far vedere che \mathcal{W} è globalmente canonica, i.e. che per ogni (\bar{t}, \bar{f}) esiste un intorno \bar{U} di (\bar{t}, \bar{f}) tale che la trasformazione \mathcal{W} che trasforma \bar{U} in un intorno $\bar{V} = \mathcal{W}(\bar{U})$ in $M_{\mathcal{F}}$ del punto $(\bar{q}, \bar{p}) = \mathcal{W}(\bar{t}, \bar{f})$ è canonica.

Definiamo $A^{\bar{t}}: (t, f) \rightarrow (t + \bar{t}, f)$, la traslazione di \bar{t} , e poniamo $\bar{V} = \Phi^{\bar{t}}(V_*)$. Sia $A^{\bar{t}}$ sia $\Phi^{\bar{t}}$ sono canoniche: la prima lo è banalmente, come è immediato verificare, la seconda perché non è altro che il flusso hamiltoniano, che definisce una trasformazione canonica per il teorema 70.27.

Quindi le trasformazioni $\mathcal{W}_* : U_* \rightarrow V_*$, $A^{\bar{t}} : U_* \rightarrow \bar{U}$ e $\Phi^{\bar{t}} : V_* \rightarrow \bar{V}$ sono tutte canoniche, e di conseguenza sarà canonica anche la trasformazione

$$73.28 \quad \bar{\mathcal{W}} = \Phi^{\bar{t}} \circ \mathcal{W}_* \circ A^{-\bar{t}} : \bar{U} \rightarrow \bar{V}, \quad (73.28)$$

così che possiamo concludere che \mathcal{W} è canonica.

Infine, per completare la dimostrazione del teorema di Arnol'd Liouville, dobbiamo definire le variabili azione-angolo. Ricordiamo che si ha

$$73.29 \quad t = \frac{1}{2\pi} A(f) \varphi, \quad (73.29)$$

dove $A(f)$ è la matrice dei periodi. Vogliamo definire una variabile d'azione $J = J(f)$ tale che $(q, p) \rightarrow (\varphi, J)$ sia canonica. Definiamo dunque

$$73.30 \quad J_k(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k(f)} \langle p, dq \rangle, \quad k = 1, \dots, n, \quad (73.30)$$

dove $\gamma_k(f)$ è la curva chiusa che si ottiene facendo variare la sola variabile φ_k di 2π , tenendo fisse tutte le altre φ_i , $i \neq k$. Per il Lemma 73.11, l'integrale non dipende dal punto iniziale scelto lungo la curva.

Dobbiamo allora dimostrare che risulta

$$73.31 \quad \frac{\partial J}{\partial f} = \frac{1}{2\pi} A^T(f), \quad (73.31)$$

con $A^T(f)$ matrice trasposta di $A(f)$. Infatti, se vale la (73.31), allora la funzione

$$73.32 \quad S(\varphi, f) = \langle \varphi, J(f) \rangle \quad (73.32)$$

può essere utilizzata come funzione generatrice di seconda specie per generare la trasformazione canonica cercata.

Per verificare la (73.31) consideriamo l'incremento

$$73.33 \quad J_k(f + \varepsilon) - J_k(f) = \frac{1}{2\pi} \left(\oint_{\gamma_k(f+\varepsilon)} \langle p, dq \rangle - \oint_{\gamma_k(f)} \langle p, dq \rangle \right), \quad (73.33)$$

che possiamo riscrivere come

$$73.34 \quad J_k(f + \varepsilon) - J_k(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_k(f, \varepsilon)} \langle p, dq \rangle, \quad (73.34)$$

dove $\Gamma_k(f, \varepsilon)$ è un ciclo ottenuto dai due cicli $\gamma_k(f)$ e $\gamma_k(f + \varepsilon)$ aggiungendo un percorso di andata e uno di ritorno tra i due cicli, per esempio uno a $\varphi_k = 0$ e uno a $\varphi_k = 2\pi$ (in termini di t , il primo corrisponde a $t = 0$ e il secondo a t tale che ciascuno dei t_i è aumentato del periodo T_{ki} , con $T = A^T$, se $A = A(f)$ è la matrice

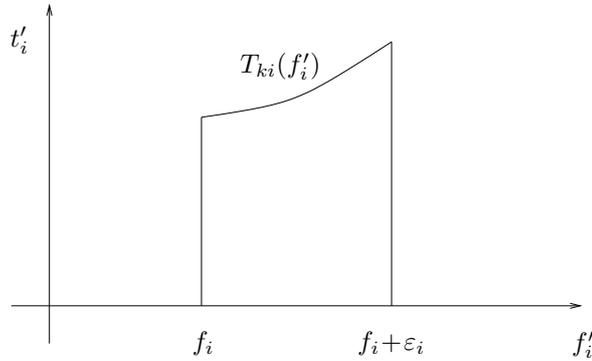


FIGURA 73.2 Ciclo $\tilde{\Gamma}_{ki}(f, \varepsilon)$ nelle variabili (t'_i, f'_i) .

dei periodi). L'immagine del ciclo $\Gamma_k(f, \varepsilon)$ nelle variabili (t, f) è il prodotto di n cicli $\tilde{\Gamma}_{ki}(f, \varepsilon)$ nelle variabili (t'_i, f'_i) , tali che ogni ciclo $\tilde{\Gamma}_{ki}(f, \varepsilon)$ è costituito dai quattro rami: (i) $f_i \leq f'_i \leq f_i + \varepsilon_i, t'_i = 0$; (ii) $f'_i = f_i + \varepsilon_i, 0 \leq t'_i \leq T_{ki}(f_i + \varepsilon_i)$; (iii) $f_i \leq f'_i \leq f_i + \varepsilon_i, t'_i = T_{ki}(f'_i)$, (iv) $f'_i = f_i, 0 \leq t'_i \leq T_{ki}(f_i)$; cfr. la figura 73.2.

Poiché la trasformazione \mathcal{W} è canonica, essa conserva l'invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan (cfr. il teorema 69.34), quindi

$$73.35 \quad J_k(f + \varepsilon) - J_k(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \oint_{\tilde{\Gamma}_{k,i}(f, \varepsilon)} f_j dt_j, \quad (73.35)$$

dove per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha

$$73.36 \quad \frac{1}{2\pi} \oint_{\tilde{\Gamma}_{k,i}(f, \varepsilon)} f_j dt_j = \frac{1}{2\pi} \text{Area}(\tilde{\Gamma}_{k,i}(f, \varepsilon)) = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_i T_{ki}(f) + O(\varepsilon^2), \quad (73.36)$$

Di conseguenza si ha $\partial J_k / \partial f_i = T_{ki}(f) / 2\pi = A_{ik}(f) / 2\pi$, in accordo con la (73.31).

p.73.16 **73.16. Osservazione.** Il teorema di Arnol'd-Liouville afferma che sotto le ipotesi (1)-(3) si ha: (i) M_f è diffeomorfa a \mathbb{T}^n ; (ii) esiste un intorno \mathcal{F} di f in cui vale lo stesso risultato, e in cui si possono usare variabili azione-angolo. La parte (i) del teorema è dovuta a Liouville, mentre la parte (ii) è dovuta ad Arnol'd. Talora i due risultati sono enunciati separatamente, rispettivamente come teorema di Liouville e teorema di Arnol'd.

sec.74

74. Alcuni esempi

p.74.1 **74.1. Introduzione.**

p.74.2 **74.2. ESEMPIO.** Sia dato il sistema meccanico conservativo descritto dalla la-

grangiana

$$74.1 \quad \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_2^2}{1+q_1^2}\right) - (1+q_1^2)(q_1^2+q_2^2-1). \quad (74.1)$$

- (1) Si trovi la hamiltoniana.
- (2) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi, e la si integri per separazione di variabili.
- (3) Si determinino le variabili d'azione, ove possibile.
- (4) Si determinino le frequenze del sistema come integrali definiti

p.74.3 **74.3.** *Discussione dell'esempio 74.2. hamiltoniana.* Ponendo

$$74.2 \quad \begin{cases} p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1, \\ p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{1}{1+q_1^2}\dot{q}_2, \end{cases} \quad (74.2)$$

la hamiltoniana si ottiene come trasformata di Legendre della lagrangiana. Quindi la funzione

$$74.3 \quad \begin{aligned} H(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 - \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \\ &= \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}(1+q_1^2)p_2^2 + (1+q_1^2)(q_1^2+q_2^2-1) \end{aligned} \quad (74.3)$$

descrive la hamiltoniana del sistema.

p.74.4 **74.4.** *Discussione dell'esempio 74.2. Equazione di Hamilton-Jacobi.* Possiamo riscrivere la hamiltoniana come

$$74.4 \quad H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}p_1^2 + (q_1^4 - 1) + (1 + q_1^2) \left(\frac{1}{2}p_2^2 + q_2^2 \right), \quad (74.4)$$

quindi il sistema è separabile.

Quindi possiamo cercare una funzione caratteristica di Hamilton, che risolva l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$74.5 \quad H\left(q_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right) = \alpha_1 \quad (74.5)$$

nella forma

$$74.6 \quad W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(q_2, \alpha_2). \quad (74.6)$$

Otteniamo dunque

$$74.7 \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2 + q_2^2 = \alpha_2, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 + q_1^4 + \alpha_2 q_1^2 - 1 + \alpha_2 = \alpha_1. \end{cases} \quad (74.7)$$

È importante sottolineare che, rispetto alla discussione di §71 e §72, il ruolo delle variabili q_1 e q_2 è invertito, nel senso che stiamo scrivendo la hamiltoniana nella forma $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h_1(q_1, p_1, h_2(q_2, p_2))$ – cfr. la (71.36) o la (71.40) – e quindi gli indici 1 e 2 sono scambiati.

Per risolvere la prima equazione fissiamo α_2 e $q_{2,0}$ in modo che si abbia

$$74.8 \quad \alpha_2 - q_2^2 \geq 0. \quad (74.8)$$

Quindi dobbiamo scegliere $\alpha_2 \geq 0$ e, fissato α_2 , dobbiamo scegliere $q_{2,0} \in \mathcal{Q}_2$, dove

$$74.9 \quad \mathcal{Q}_2 = \{q_2 \in \mathbb{R} : |q_2| \leq \sqrt{\alpha_2}\}. \quad (74.9)$$

Quindi

$$74.10 \quad W_2(q_2, \alpha_2) = \pm \int_{q_{2,0}}^{q_2} \sqrt{2(\alpha_2 - (q_2')^2)} \, dq_2', \quad (74.10)$$

dove $q_{2,0}$ è un valore arbitrario in \mathcal{Q}_2 e il segno \pm dipende dal segno del momento p_2 all'istante iniziale.

Per risolvere la seconda equazione dobbiamo fissare α_1 e $q_{1,0}$ in modo che si abbia

$$74.11 \quad \alpha_1 - q_1^4 - \alpha_2 q_1^2 + 1 - \alpha_2 \geq 0. \quad (74.11)$$

Quindi dobbiamo scegliere

$$74.12 \quad \alpha_1 \geq \min_{q_1 \in \mathbb{R}} f(q_1), \quad (74.12)$$

avendo definito

$$74.13 \quad f(q_1) = q_1^4 + \alpha_2 q_1^2 - 1 + \alpha_2, \quad (74.13)$$

e, fissato α_1 , dobbiamo scegliere $q_{1,0} \in \mathcal{Q}_1$, dove

$$74.14 \quad \mathcal{Q}_1 = \{q_1 \in \mathbb{R} : f(q_1) \leq \alpha_1\}. \quad (74.14)$$

In conclusione otteniamo

$$74.15 \quad W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int_{q_{1,0}}^{q_1} \sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1'))} \, dq_1', \quad (74.15)$$

dove $q_{1,0}$ è un valore arbitrario in \mathcal{Q}_1 e il segno \pm dipende dal segno del momento p_1 all'istante iniziale (ovviamente la dipendenza da α_2 è attraverso la funzione f (e quindi anche attraverso la definizione del dominio \mathcal{Q}_1).

Dobbiamo quindi studiare la funzione $f(q_1)$.

Chiamiamo $q = q_1$ per semplicità. Poiché la funzione $f(q)$ è pari è sufficiente studiarla per $q \geq 0$. Si ha

$$74.16 \quad \begin{aligned} f(q) &= q^4 + \alpha_2 q^2 - 1 + \alpha_2, \\ f'(q) &= 4q^3 + 2\alpha_2 q, \\ f''(q) &= 12q^2 + 2\alpha_2, \end{aligned} \quad (74.16)$$

così che risulta $f'(q) = 0$ se e solo se $q = 0$; inoltre $f''(0) = 2\alpha_2$. Quindi, se $\alpha_2 > 0$, troviamo che $q = 0$ è un punto di minimo. Se $\alpha_2 = 0$ la funzione $f(q) = q^4 - 1$ ha un unico punto stazionario, $q = 0$, che è ancora un punto di minimo.

In corrispondenza del punto di minimo risulta $f(0) = -1 + \alpha_2$, che dà l'espressione corretta del valore di $f(q)$ in corrispondenza del punto di minimo anche per $\alpha_2 = 0$. Quindi concludiamo che si deve avere

$$74.17 \quad \alpha_1 \geq \min_{q_1 \in \mathbb{R}} f(q_1) = -1 + \alpha_2. \quad (74.17)$$

Per $\alpha_1 \geq -1 + \alpha_2$, l'insieme \mathcal{Q}_1 è definito da

$$74.18 \quad \mathcal{Q}_1 = \{q_1 \in \mathbb{R} : -q_+(\alpha_1) \leq q_1 \leq q_+(\alpha_1)\}, \quad (74.18)$$

dove $q_+(\alpha_1)$ è la soluzione positiva

$$74.19 \quad q_+(\alpha_1) = \sqrt{\frac{-\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4(1 - \alpha_2 + \alpha_1)}}{2}} \quad (74.19)$$

di $f(q) = \alpha_1$.

In conclusione, con le notazioni sopra introdotte, la funzione caratteristica di Hamilton è data da

$$74.20 \quad W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int_{q_{1,0}}^{q_1} \sqrt{2(\alpha_1 - f(q'_1))} dq'_1 \pm \int_{q_{2,0}}^{q_2} \sqrt{2(\alpha_2 - (q'_2)^2)} dq'_2. \quad (74.20)$$

p.74.5 **74.5.** *Discussione dell'esempio 74.2. Variabili d'azione.* L'analisi del punto precedente mostra che possiamo definire le variabili d'azione per $\alpha_2 \in (0, \infty)$ e per $\alpha_1 \in (-1 + \alpha_2, \infty)$.

Definiremo allora

$$74.21 \quad J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\alpha_2}}^{\sqrt{\alpha_2}} dq_2 \sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)}, \quad (74.21)$$

mentre avremo

$$74.22 \quad J_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} dq_1 \sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))} \quad (74.22)$$

con le notazioni di prima. Si noti che J_1 è funzione di α_1 e α_2 , mentre J_2 dipende dalla sola α_2 .

p.74.6 **74.6.** *Discussione dell'esempio 74.2. Frequenze.* Per determinare le frequenze ω_1 e ω_2 , si deve tener conto che si ha, per definizione,

$$74.23 \quad \omega_k = \frac{\partial \alpha_1}{\partial J_k}, \quad k = 1, 2, \quad (74.23)$$

dove $\partial\alpha_1/\partial J_k$ è uguale all'elemento $(A^{-1})_{1k}$ se A è la matrice di elementi

$$74.24 \quad A_{ij} = \frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j}. \quad (74.24)$$

Dobbiamo quindi calcolare la matrice inversa di A . Si ha

$$74.25 \quad \begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}} \begin{pmatrix} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & -\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \\ -\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & -\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \\ 0 & \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (74.25)$$

poiché risulta

$$74.26 \quad \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} = 0, \quad (74.26)$$

dal momento che J_2 dipende solo da α_2 .

Alla fine troviamo

$$74.27 \quad \omega_1 = \frac{\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}} = \frac{1}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}}, \quad \omega_2 = -\frac{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2}}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}}. \quad (74.27)$$

Si tenga conto del commento subito dopo la (74.7) qualora si voglia confrontare la (74.27) con la (72.26): gli indici 1 e 2 sono scambiati a causa del diverso ruolo delle due variabili q_1 e q_2 .

Possiamo perciò concludere che le frequenze si possono esprimere in termini dei tre integrali definiti

$$74.28 \quad \begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\alpha_2}}^{\sqrt{\alpha_2}} dq_2 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)}}, \\ \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} dq_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}, \\ \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} dq_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}} \left(-\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \right), \end{aligned} \quad (74.28)$$

dove si sono utilizzate le espressioni trovate al punto precedente per le variabili d'azione. Inoltre si ha

$$74.29 \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = 1 + q_1^2. \quad (74.29)$$

Quindi introducendo gli integrali nelle espressioni per ω_1 e ω_2 troviamo le frequenze espresse come integrali definiti:

$$\omega_1 = \frac{1}{\frac{1}{\pi} \int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} dq_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}}, \quad (74.30)$$

$$\omega_2 = \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} dq_1 \frac{1 + q_1^2}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}}{\frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\alpha_2}}^{\sqrt{\alpha_2}} dq_2 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)}} \frac{1}{\pi} \int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} dq_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}}.$$

Se il rapporto ω_1/ω_2 è razionale allora il moto complessivo è periodico, se tale rapporto è irrazionale allora il moto complessivo è quasiperiodico.

Nota bibliografica

Per la dimostrazione del teorema di Arnol'd-Liouville abbiamo seguito (pedissequamente) la trattazione estremamente chiara ed esauriente di [Benettin-Fassò]. Per la discussione degli esercizi 27÷30 sull'integrabilità del problema dei due corpi abbiamo seguito [Gallavotti].

Esercizi

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.

Esercizio 5. Dimostrare la (72.9). [Soluzione. Definiamo $q_{\pm}(J)$ tali che $K(J) - V(q_{\pm}(J)) = 0$. L'incremento ΔF della funzione (72.3) dopo un giro completo lungo la curva γ è dato da

$$\Delta F = \oint_{\gamma} p dq = 2 \int_{q_-(J)}^{q_+(J)} p dq = 2 (F(q_+(J), J) - F(q_-(J), J)),$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial J} \Delta F &= 2 \left(\int_{q_-(J)}^{q_+(J)} \frac{\partial p}{\partial J} dq + p(q_+(J)) \frac{\partial q_+(J)}{\partial J} - p(q_-(J)) \frac{\partial q_-(J)}{\partial J} \right) \\ &= 2 \int_{q_-(J)}^{q_+(J)} \frac{\partial p}{\partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J} F(q, J) \Big|_{q=q_+(J)} - \frac{\partial}{\partial J} F(q, J) \Big|_{q=q_-(J)}, \end{aligned}$$

220 CAPITOLO 18. METODO DI HAMILTON-JACOBI

dove si è usato che $\partial q_{\pm}(J)/\partial J = (\partial V(q_{\pm}(J))/\partial q)^{-1} \partial K(J)/\partial J \neq 0$ e $p(q_{\pm}(J)) = 0$, e quindi gli ultimi due addendi nella prima riga sono nulli. D'altra parte, poiché $\varphi = \partial F/\partial J$, si ha

$$\Delta\varphi = \left. \frac{\partial}{\partial J} F(q, J) \right|_{q=q_+(J)} - \left. \frac{\partial}{\partial J} F(q, J) \right|_{q=q_-(J)},$$

quindi $\Delta\varphi = \partial\Delta F/\partial J$.

Esercizio 6. Dimostrare che le equazioni di Hamilton-Jacobi per le variabili azione-angolo hanno la forma (72.16). [Soluzione. La hamiltoniana nelle variabili (φ, J) assume la forma $K = \alpha_n$, dove α_n va espresso in funzione delle variabili $J = (J_1, \dots, J_n)$, i.e. $\alpha_n = \alpha_n(J)$.]

Esercizio 7. Dimostrare la (72.18). [Soluzione. Nel derivare rispetto a J_k l'integrale

$$\oint_{\gamma_j} p_j dq_j = 2 \int_{q_-(J)}^{q_+(J)} dq_j \sqrt{2(\alpha_j(J) - V_j(q, \alpha))},$$

si tiene conto che i termini ottenuti derivando gli estremi d'integrazione si cancellano in quanto calcolati in corrispondenza dei valori $q_{\pm}(J)$ in cui si annulla l'integrando (cfr. l'esercizio 5).]

Esercizio 8. Dimostrare che Φ^t definito in (73.1) è un gruppo commutativo a n parametri. [Suggerimento. Usando il fatto che i campi vettoriali ξ_1, \dots, ξ_n comutano tra loro, si ha $\Phi^{t+t'} = \Phi^t \circ \Phi^{t'}$, quindi $\Phi^0(x) = \mathbb{1}$, $(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t}$ e $\Phi^{t+t'} = \Phi^{t'+t}$.]

Esercizio 9. Con le notazioni usate nella dimostrazione del Lemma 73.3 (cfr. §73.4), dimostrare che la distanza di $t \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_{p-1}$ da E_{p-1} è limitata inferiormente. [Suggerimento. Si ragiona per assurdo. Se l'affermazione è falsa allora esiste una successione $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\text{dist}(t_n, E_{p-1}) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ in modo strettamente monotono. Chiamiamo

$$\tau_n = \sum_{i=1}^{p-1} \mu_{n,i} e_i$$

la proiezione di t_n su E_{p-1} : gli elementi $([\cdot])$ indica la parte intera)

$$\tau'_n = \tau_n - \sum_{i=1}^{p-1} [\mu_{n,i}] e_i$$

cadono allora all'interno di \mathcal{E}_{p-1} , e quindi i punti

$$t'_n = t_n - \sum_{i=1}^{p-1} [\mu_{n,i}] e_i$$

sono in \mathcal{G} , sono diversi tra loro (in quanto hanno diversa distanza da E_{p-1}) e sono distinti dall'origine (in quanto tale distanza è diversa da zero), con distanza dall'origine limitata. Si è quindi trovata una successione di punti che si accumula, contro l'ipotesi che il gruppo fosse discreto.]

Esercizio 10. Dimostrare che \mathcal{T} , definito in (73.6), è un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n e non dipende da x . [Suggerimento. Si verifica immediatamente che è un gruppo. Che sia discreto segue dal fatto che Ψ è un diffeomorfismo locale: quindi se $T \in \mathcal{T}$ sia ha $\Phi^{T+t}(x) \neq x$ per t sufficientemente piccolo, e quindi esiste un intorno di T che non contiene altri periodi. L'indipendenza da x si vede come segue: se $\Phi^T(x) = x$ e $y \neq x$ poniamo $y = \Phi^\sigma(x)$: questo è possibile per la suriettività di Ψ dimostrata al

punto (ii) di §73.6. Si ha allora $\Phi^T(y) = \Phi^T(\Phi^\sigma(x)) = \Phi^\sigma(\Phi^T(x)) = \Phi^\sigma(x) = y$, quindi T è anche un periodo di y .]

Esercizio 11. Si dimostri che per ogni f sufficientemente vicino a f_* la superficie Σ trasversa a M_{f_*} interseca la superficie M_f in uno e un solo punto. [Suggerimento. Segue dal teorema delle funzione implicata.]

Esercizio 12. Si dimostri che la matrice dei periodi A è regolare in f . [Suggerimento. Segue dal teorema delle funzione implicata.]

Esercizio 13. Si dimostri che l'applicazione $\mathcal{W}(t, f) = \Phi^t(y(f))$ introdotta in §73.8 è un diffeomorfismo locale. [Suggerimento. Per costruzione si ha

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial(t, f)}(0, f) = \left(h \quad \frac{\partial y}{\partial f} \right),$$

dove h e $\partial y/\partial f$ sono le matrici $2n \times n$ le cui i -esime colonne sono costituite dal vettore h_i e dal vettore $\partial y/\partial f_i$, rispettivamente. Infatti, per $i = 1, \dots, 2n$, si ha

$$\left. \frac{\partial(\Phi^t)_i}{\partial t_j}(y(f)) \right|_{t=0} = (h_j(y(f)))_i, \quad \left. \frac{\partial(\Phi^t)_i}{\partial f_j}(y(f)) \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{2n} \left. \frac{\partial(\Phi^t)_i}{\partial y_k}(y(f)) \right|_{t=0} \frac{\partial y_k}{\partial f_j} = \frac{\partial y_i}{\partial f_j},$$

dove si è usato che $\partial(\Phi^t)_i/\partial y_k(y(f))|_{t=0} = \delta_{i,k}$. I $2n$ vettori che hanno componenti h_i e $\partial y/\partial f_i$ sono linearmente indipendenti, poiché la superficie Σ è trasversa a M_{f_*} . Di conseguenza il determinante della matrice $[\partial \mathcal{W}/\partial(t, f)](0, f)$ è diverso da zero.

Per $t \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial(t, f)}(t, f) = D\Phi_{y(f)}^t \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial(t, f)}(0, f),$$

dove $D\Phi_x^t$ indica l'applicazione tangente a Φ^t in x .]

Esercizio 14. Dimostrare la (73.17). [Soluzione. Per $1 \leq i \leq k$ e $k+1 \leq j \leq n$ si ha

$$\begin{aligned} \{F_i, F_j\} &= \sum_{m=1}^k \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_m} \frac{\partial F_j}{\partial p_m} - \frac{\partial F_i}{\partial p_m} \frac{\partial F_j}{\partial q_m} \right) + \sum_{m=k+1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_m} \frac{\partial F_j}{\partial p_m} - \frac{\partial F_i}{\partial p_m} \frac{\partial F_j}{\partial q_m} \right) \\ &= \sum_{m=1}^k (A_{im}0 - R_{im}C_{jm}) + \sum_{m=k+1}^n (B_{im}0 - 0D_{jm}), \end{aligned}$$

che implica la (73.17).]

Esercizio 15. Dimostrare che la (73.22) implica la (73.19). [Soluzione. Introducendo la matrice A di componenti $A_{ij} = \partial F_i/\partial p_j$ e i vettori v_i di componenti $v_{ij} = \partial P_i/\partial q_j - \partial P_j/\partial q_i$, possiamo definire i vettori $w_i = Av_i$ e riscrivere la (73.22) nella forma $A^2 v_i = Aw_i = 0$. Poiché $\det A \neq 0$ la relazione $Aw_i = 0$ implica $w_i = 0$, e, analogamente, $w_i = 0$ implica, per lo stesso motivo, $v_i = 0$.]

Esercizio 16. Si consideri il sistema unidimensionale costituito da un punto materiale di massa m soggetto a una forza di energia potenziale

$$U(q) = \frac{k}{2n} q^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (1) Se ne scriva la lagrangiana.
- (2) Si determinino la hamiltoniana e le corrispondenti equazioni di Hamilton.

222 CAPITOLO 18. METODO DI HAMILTON-JACOBI

(3) Si riscriva la hamiltoniana in termini delle variabili azione-angolo.

(4) Si trovi il periodo corrispondente in funzione dell'azione. [*Suggerimento.* Si ha $J = a_n \alpha^{(n+1)/2n}$, quindi $H = c_n J^{2n/(n+1)}$, dove

$$a_n = \frac{\sqrt{2m}}{\pi} \left(\frac{2n}{k}\right)^{1/2n} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^{2n}}, \quad c_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)^{2n/(n+1)},$$

sono due costanti che dipendono solo da n .]

Esercizio 17.

Esercizio 18. Si consideri un punto materiale P di massa $m = 1$ vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$z^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 1,$$

sottospeso all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm 1)$ tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile.

(1) Verificare che la lagrangiana che descrive il sistema è data da

$$\mathcal{L}(\theta, z, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right) \dot{z}^2 + (1-z^2) \dot{\theta}^2 + kz^2 - gz,$$

dove g è l'accelerazione gravitazionale. [Si suggerisce di usare coordinate cilindriche tenendo conto che la coordinata z è legata alle coordinate x, y attraverso l'equazione che definisce l'ellissoide.]

(2) Scrivere la hamiltoniana del sistema e le corrispondenti equazioni di Hamilton.

(3) Discutere l'equazione di Hamilton-Jacobi nel caso $g = 0$ e trovare una funzione caratteristica $W(\theta, z, \alpha_1, \alpha_2)$ per separazione di variabili.

(4) Determinare le variabili d'azione J_1 e J_2 e le frequenze corrispondenti ω_1 e ω_2 in termini di integrali definiti, sempre nel caso $g = 0$.

Esercizio 19. Sia dato il sistema meccanico conservativo descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{q}_2^2}{\sin^2 q_1} \right) - \sin q_1 (1 + \sin q_1 \sin q_2).$$

(1) Si trovi la hamiltoniana.

(2) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi, e la si integri per separazione di variabili.

(3) Si determinino le variabili d'azione, ove possibile.

(4) Si determinino le frequenze del sistema come integrali definiti.

Esercizio 20. Si consideri il sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(1+x^2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1+\sin^2 \theta}{1+x^2} \right) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^2}{1+\sin^2 \theta} \right),$$

(1) Si trovi la hamiltoniana.

(2) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi, e se ne trovi una funzione caratteristica di Hamilton per separazione di variabili.

(3) Si determinino le variabili d'azione.

(4) Si determinino le frequenze dei moti multiperiodici utilizzando le variabili azione-angolo.

(5) Si discuta la periodicità del moto con condizioni iniziali $\theta = 0, x = 0, \dot{\theta} = 1, \dot{x} = \sqrt{2}$.

Esercizio 21. Un punto materiale di massa $m = 1$ si muove sulla superficie di un ellissoide di equazione

$$z^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 1.$$

Il punto è collegato tramite due molle di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k ai due punti dell'ellissoide di coordinate $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$. Sul punto non agiscono altre forze.

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (2) Discutere eventuali simmetrie del sistema.
- (3) Scrivere la hamiltoniana del sistema e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
- (4) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi, e si trovi una funzione caratteristica di Hamilton per separazione di variabili.
- (5) Determinare le variabili d'azione.
- (6) Si supponga che il sistema sia soggetto all'ulteriore vincolo che il punto P si possa muovere solo nel piano xz . Determinare le configurazioni d'equilibrio del sistema e discuterne la stabilità. Determinare infine i dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.

Esercizio 22. Si consideri la hamiltoniana $K(Q, P)$ ottenuta nell'esercizio 27 del Capitolo 17 attraverso la trasformazione canonica ivi suggerita. Dimostrare che la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi è risolubile per separazione di variabili e determinare le variabili d'azione e le frequenze come integrali definiti.

Esercizio 23. Si consideri il sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{k}{r} - \frac{\cos^2 \theta}{r^2}$$

con $r \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in \mathbb{T}$.

- (1) Si trovi la hamiltoniana.
- (2) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi, e se ne trovi una funzione caratteristica di Hamilton per separazione di variabili.
- (3) Si determinino le variabili d'azione.
- (4) Si determinino le frequenze dei moti multiperiodici utilizzando le variabili azione-angolo.

Esercizio 24. Un disco omogeneo di densità $\sigma = 1$ e raggio $R = 2$ si muove in un piano verticale, soggetto all'azione della forza peso e di due molle, di costante elastica $k = 1$ e lunghezza a riposo trascurabile: le due molle collegano due punti diametralmente opposti del disco a un punto P di massa $m = 1$ libero di muoversi lungo una retta orizzontale r .

- (1) Determinare le simmetrie del sistema e i momenti conservati corrispondenti.
- (2) Scrivere la hamiltoniana del sistema e dimostrare che il sistema è risolubile per separazione di variabili.
- (3) Individuare un dato iniziale per il quale il moto è periodico e calcolare esplicitamente il periodo.

Esercizio 25. Una circonferenza omogenea di massa M e raggio R ruota in un piano orizzontale intorno al suo centro C . Un punto di massa m è vincolato a muoversi lungo la circonferenza ed è collegato da una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica k a un punto P della circonferenza.

- (1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (2) Scrivere la hamiltoniana e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
- (3) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi e integrarla per separazione di variabili.
- (4) Si determinino i periodi dei moti multiperiodici in termini di integrali definiti.

Esercizio 26. Un cilindro omogeneo di raggio R , di altezza h e di massa M si muove nello spazio in modo tale che il suo centro di massa sia vincolato a muoversi lungo una retta r che formi un angolo φ con un piano orizzontale π . Siano A e B i centri delle due basi del cilindro: entrambi i punti sono collegati a un punto fisso P di r tramite due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

- (1) Scrivere la hamiltoniana del sistema e le corrispondenti equazioni di Hamilton.
- (2) Individuare eventuali quantità conservate, studiando le simmetrie del sistema. Si interpreti il risultato alla luce del teorema di Noether.
- (3) Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi, e dimostrare che il sistema è separabile.
- (4) Determinare le variabili d'azione e le frequenze dei moti multiperiodici.

Esercizio 27. Dimostrare che il problema dei due corpi (cfr. l'esempio 54.11) è un sistema integra-

bile, secondo la definizione data in §46.1, con periodi

$$T_1(E, A) = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_A(\rho))}}, \quad T_2(E, A) = \frac{2\pi m}{A} \frac{\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_A(\rho))}}}{\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_A(\rho))}}},$$

dove E e A sono, rispettivamente, l'energia, e la terza componente del momento angolare,

$$V_A(\rho) = V(\rho) + \frac{A^2}{2m\rho^2}$$

è l'energia potenziale efficace, e $\rho_{\pm} = \rho_{\pm}(E, A)$ sono le due uniche radici dell'equazione $E - V_A(\rho) = 0$. [Soluzione. Il sistema ammette i due integrali primi

$$A = m\rho^2\dot{\theta}, \quad E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + V(\rho),$$

che, riscritti in termini delle coordinate canoniche $(\rho, \theta, \pi_\rho, p_\theta)$, con $p_\rho = \partial\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta})/\partial\dot{\rho}$ e $p_\theta = \partial\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta})/\partial\dot{\theta}$ (cfr. la (54.12)), diventano

$$A = p_\theta, \quad E = H(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} \right) + V(\rho).$$

Sia $w_0 = (z_0, \theta_0, \dot{\theta}_0)$ un dato iniziale per il sistema con E, A fissati, con $z_0 = (\rho_0, \dot{\rho}_0)$. Si noti che z_0 costituisce un dato iniziale nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ per il moto della variabile radiale $\rho(t)$.

Se $R(t) = R(t, E, A)$ è la soluzione dell'equazione radiale $m\ddot{\rho} = -\partial V_A(\rho)/\partial\rho$ con dato iniziale $R(0) = \rho_0$ e $\dot{R}(0) = 0$, indichiamo con $t_0(z_0)$ il tempo necessario perché si abbia $R(t_0(z_0)) = \rho_0$ e $\dot{R}(t_0(z_0)) = \dot{\rho}_0$. Quindi la soluzione dell'equazione radiale è $\rho(t) = R(t + t_0(z_0))$ e ha periodo $T_1 = T_1(E, A)$, come segue dall'analisi dei Capitoli 6 e 7. Inoltre si ha $\dot{\theta}(t) = A/m\rho^2(t) = A/mR^2(t + t_0(z_0))$. La funzione $A/mR^2(t)$ è una funzione regolare (poiché $R(t) \geq \rho_- > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$) periodica in t di periodo T_1 , quindi può essere sviluppata in serie

$$\frac{A}{mR^2(t)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k t / T_1} \chi_k(E, A),$$

dove $\chi_k = \chi_k(A, E)$ sono i coefficienti di Fourier di A/mR^2 . Poiché la funzione A/mR^2 è C^∞ i coefficienti χ_k decadono più velocemente di ogni potenza, e quindi la serie di Fourier converge uniformemente. Integrando $\dot{\theta}(t) = A/m\rho^2(t)$, si trova

$$\theta(t) = \theta_0 + \chi_0 t + S(t + t_0(z_0)) - S(t_0(z_0)),$$

dove

$$S(t) = S(t, E, A) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{e^{2\pi i k t / T_1}}{2\pi i k / T_1} \chi_k(E, A).$$

Si vede quindi che il moto è caratterizzato dai due periodi T_1 e $2\pi/\chi_0$. D'altra parte si ha

$$\chi_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} dt \frac{A}{mR^2(t)} = \frac{2}{T_1} \int_{\rho_-}^{\rho_+} dR \frac{A}{mR^2(t)} \frac{dt}{dR} = \frac{2}{T_1} \int_{\rho_-}^{\rho_+} dR \frac{A}{mR^2(t)\dot{R}}$$

così che, usando che $\dot{R} = \sqrt{(2/m)(E - V_A(R))}$, si ottiene $2\pi/\chi_0 = T_2 = T_2(A, E)$. Infine, se poniamo $w = (z, \theta, \dot{\theta})$ e indichiamo con $z(t) = (\rho(t), \dot{\rho}(t))$ la soluzione dell'equazione radiale con dato iniziale $z(0) = z_0$ e con $w(t) = (z(t), \theta(t), \dot{\theta}(t))$ la soluzione del sistema con dato iniziale $w(0) = w_0$, definiamo le coordinate

$$\varphi_1(w) = \frac{2\pi}{T_1(E, A)} t_0(z), \quad \varphi_2(z) = \theta - S(t_0(z), E, A).$$

Si vede subito che

$$\varphi_1(w(t + T_1)) = \frac{2\pi}{T_1} t_0(z(t + T_1)) = \frac{2\pi}{T_1} (t_0(z(t)) + T_1) = \varphi_1(w(t)) + 2\pi,$$

dove si è tenuto conto che, per costruzione, $t_0(z(t)) = t_0(z_0) + t$, e, analogamente,

$$\begin{aligned} \varphi_2(w(t + T_2)) &= \theta(t + T_2) - S(t_0(z(t + T_2))) \\ &= \theta_0 + \chi_0 t + 2\pi + S(t_0(z(t + T_2))) - S(t_0(z_0)) - S(t_0(z(t + T_2))) \\ &= \theta_0 + \chi_0 t + 2\pi - S(t_0(z_0)) \\ &= \theta_0 + \chi_0 t + 2\pi + S(t_0(z(t))) - S(t_0(z_0)) - S(t_0(z(t))) \\ &= \varphi_2(w(t)) + 2\pi, \end{aligned}$$

che mostra che le coordinate (φ_1, φ_2) sono angoli. Infine la trasformazione di coordinate $(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2, E, A)$ risulta regolare e invertibile. Questo completa la dimostrazione dell'integrabilità del sistema.]

Esercizio 28. Discutere come si modifica la discussione dell'esercizio 27 nel caso in cui l'equazione $E - V_A(\rho) = 0$ abbia più di due radici.

Esercizio 29. Dimostrare che il problema dei due corpi soddisfa le ipotesi del teorema di Arnol'd-Liouville. [*Suggerimento.* Il sistema ammette i due integrali primi indipendenti A ed E . Si verifica subito che sono in involuzione.]

Esercizio 30. Calcolare le variabili azione-angolo per il problema dei due corpi. [*Soluzione.* Si definisca

$$L = \lambda(E, A) = \int_{\rho_-(E, A)}^{\rho_+(E, A)} \frac{d\rho}{\pi} \sqrt{2m(E - V_A(\rho))}.$$

Tale relazione può essere invertita, per il teorema della funzione implicita, dando $E = \varepsilon(L, A)$ tale che $L = \lambda(\varepsilon(L, A), A)$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dL}{dL} = \frac{\partial \lambda}{\partial E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial L}, \\ 0 &= \frac{dL}{dA} = \frac{\partial \lambda}{\partial E} \frac{\partial \varepsilon}{\partial A} + \frac{\partial \lambda}{\partial A}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial L} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial E} \right)^{-1} = 2\pi \left(2 \int_{\rho_-(E, A)}^{\rho_+(E, A)} d\rho \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_A(\rho))}} \right)^{-1} = \frac{2\pi}{T_1},$$

e

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A} = - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial E} \right)^{-1} \frac{\partial \lambda}{\partial A} = \frac{2\pi}{T_1} \frac{A}{m\pi} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_A(\rho))}} = \frac{2\pi}{T_2},$$

226 CAPITOLO 18. METODO DI HAMILTON-JACOBI

dove si sono utilizzate le definizioni di T_1 e T_2 dell'esercizio 27.

Si consideri allora la funzione generatrice

$$F(\rho, \theta, L, A) = A\theta + \int_{\rho_-(\varepsilon(L, A))}^{\rho} d\rho' \sqrt{2m(\varepsilon(L, A) - V_A(\rho'))}.$$

Poiché

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = A = p_\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \rho} = \sqrt{2m(\varepsilon(L, A) - V_A(\rho'))} = p_\rho,$$

si vede immediatamente che F risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H\left(\rho, \theta, \frac{\partial F}{\partial \rho}, \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) = \varepsilon(L, A).$$

Se perciò definiamo

$$g = \frac{\partial F}{\partial A}, \quad \ell = \frac{\partial F}{\partial L},$$

la trasformazione di coordinate $(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta) \rightarrow (\ell, g, L, A)$ è canonica. Usando il fatto che

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial A} &= \theta + \int_{\rho_-(\varepsilon(L, A))}^{\rho} d\rho' \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A} - \frac{A}{m(\rho')^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(\varepsilon(L, A) - V_A(\rho'))}}, \\ \frac{\partial F}{\partial L} &= \int_{\rho_-(\varepsilon(L, A))}^{\rho} d\rho' \frac{\partial \varepsilon}{\partial L} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(\varepsilon(L, A) - V_A(\rho'))}}, \end{aligned}$$

si trova

$$\ell = \varphi_1 = \frac{2\pi}{T_1(\varepsilon(L, A), A)} t_0(z), \quad g = \varphi_2 = \theta - S(t_0(z), \varepsilon(L, A), A),$$

dove φ_1, φ_2 sono definiti nell'esercizio 27. Infatti si ha $\partial/\varepsilon/\partial L = 2\pi/T_1$ e $\partial/\varepsilon/\partial A = 2\pi/T_2$. Inoltre

$$I(F) = \int_{\rho_-}^{\rho} d\rho' \frac{F(\rho')}{\sqrt{\frac{2}{m}(\varepsilon(L, A) - V_A(\rho'))}} = \int_{\rho_-}^{\rho} d\rho' \frac{F(\rho')}{\dot{\rho}} = \int_0^{t_0(z)} dt F(R(t)),$$

che per $F = 1$ dà $I(F) = t_0(z)$ e per $F = A/m\rho^2$ dà $I(F) = \chi_0 t_0(z) + S(t_0(z))$.]