Capitolo 19. Teoria delle perturbazioni

sec.75 75. Oscillatore armonico in variabili azione-angolo

p.75.1 **75.1. Introduzione.**

p.75.2 **75.2.** Variabili azione-angolo per l'oscillatore armonico. La hamiltoniana

75.1
$$H(p,q) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \tag{75.1}$$

diventa (cfr. l'esercizio 1)

75.2
$$K(J) = \omega J, \tag{75.2}$$

con la trasformazione canonica

75.3
$$q = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\sin\varphi, \qquad p = \sqrt{2Jm\omega}\cos\varphi. \tag{75.3}$$

La funzione generatrice (di seconda specie) è

75.4
$$F(q,J) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{2m\omega J - m^2\omega^2 q^2}. \tag{75.4}$$

Si noti infatti che, derivando la (75.4) rispetto a J, si trova

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial J} = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{1-(x')^2}}, \qquad x = q\sqrt{\frac{m\omega}{2J}},$$

e prendendo $x_0 = 0$ (che equivale a fissare l'origine dei tempi) si trova $\varphi = \arcsin x$, in accordo con la (75.3).

p.75.3 **75.3.** L'oscillatore armonico è un sistema integrabile. Inoltre è un *sistema iscocrono*: la frequenza ω non dipende dall'azione. Tale condizione prende il nome di *condizione di isocronia.*

p.75.4 **75.4.**

sec.76

76. Teoria perturbativa al primo ordine

p.76.1 **76.1. Introduzione.**

p.76.2 **76.2.** Teoria perturbativa. Teoria perturbativa al primo ordine. Studiamo sistemi descritti da hamiltoniane della forma

76.1
$$H(\varphi, J) = H_0(J) + \varepsilon V(\varphi, J), \tag{76.1}$$

con $H_0(J)$ integrabile. Chiamiamo ε *parametro perturbativo.*

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre richiesto la mimima regolarità possibile, per esempio che la hamiltoniana fosse di classe C^2. Al contrario in questo e il prossimo capitolo richiederemo che la hamiltoniana sia una funzione analitica dei suoi argomenti. Più precisamente assumiamo che le funzioni H_0 e V in (76.1) siano analitiche nel dominio

76.1a
$$D(\rho, \xi, J_0) = \Big\{ (\varphi, I) \in \mathbb{C}^{2n} : \mathrm{Re}\, \varphi_i \in \mathbb{T}, \quad |\mathrm{Im}\, \varphi_i| \le \xi, \quad |J_i - J_{0i}| \le \rho \Big\} . \tag{76.2}$$

In particolare, si può espandere $V((\varphi, I)$ in serie di Fourier in φ,

76.12
$$V(\varphi, J) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^N} \mathrm{e}^{i\langle \nu, \varphi\rangle} V_\nu(J), \tag{76.3}$$

dove i coefficienti di Fourier $V_\nu(J)$ decadono esponenzialemente in ν, i.e. si ha (cfr. l'esercizio 2).

76.12a
$$|V_\nu(J)| \le \Phi\, \mathrm{e}^{-\xi|\nu|}, \qquad \Phi = \max_{(\varphi,J)\in D(\rho,\xi,I_0)} |V(\varphi, J)|. \tag{76.4}$$

Come esempio della (76.1) consideriamo, in coordinate cartesiane,

76.2
$$H(q,p) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} \left(p_k^2 + m_k^2 \omega_k^2 q_k^2 \right) + \frac{\alpha}{4} \sum_{1 \le k \ne j \le N} (q_k - q_j)^4, \tag{76.5}$$

che diventa della forma (76.1) dopo il riscalamento $(q,p) \to (q', p')$, con $q = \delta q'$ e $p = \delta p'$, definendo $\varepsilon = \delta^2$ e dividendo la hamiltoniana per ε. In particolare si ha

76.3
$$H_0(J) = \sum_{k=1}^N \omega_k J_k = \langle \omega, J \rangle . \tag{76.6}$$

In termini delle variabili riscalate (q', p') le variabili azione-angolo sono definite come in (75.3). In particolare si ha $q_k' = \sqrt{2J_k/m_k\omega_k}\, \sin\varphi_k$ e $p_k' = \sqrt{2J_k m_k \omega_k}\, \cos\varphi_k$.

Si vede allora facilmente che la parte integrabile assume la forma (76.6), mentre la perturbazione diventa una funzione sia di φ sia di J (cfr. l'esercizio 3).

p.76.3 **76.3.** Cerchiamo di risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi scrivendo la funzione caratteristica di Hamilton $W(\varphi, J')$ nella forma

76.4
$$W(\varphi, J') = \langle \varphi, J' \rangle + \varepsilon W_1(\varphi, J') + O(\varepsilon^2), \tag{76.7}$$

trascurando sistematicamente gli ordini in ε superiore al primo.

Cerchiamo quindi una trasformazione (canonica) di coordinate $(\varphi, J) \to (\varphi', J')$, tale che $H(\varphi, J) = H'(J') + O(\varepsilon^2)$ per un'opportuna funzione H', i.e. tale che il sistema sia integrabile almeno fino al secondo ordine. Si ottiene

76.5
$$H_0\left(J' + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right) + \varepsilon V(\varphi, J') + O(\varepsilon^2) = H'(J') := H_0'(J') + \varepsilon H_1'(J) + O(\varepsilon^2), \tag{76.8}$$

che porta a identificare $H_0'(J') = H_0(J')$ e

76.6
$$\left\langle \omega(J'), \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right\rangle + V(\varphi, J') = H_1'(J'), \tag{76.9}$$

dove

76.7
$$\omega(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J}(J) \tag{76.10}$$

definisce l'*applicazione frequenza*.

Definiano la *media* di una funzione $F(\varphi, J')$, periodica nei suoi N argomenti φ,come

76.8
$$\langle F \rangle = \langle F(\cdot, J') \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(2\pi)^N} F(\varphi, J'), \tag{76.11}$$

e poniamo $\widetilde{F}(\varphi, J') = F(\varphi, J') - \langle F \rangle$.

Quindi al primo ordine la (76.9) diventa

76.9
$$H_1'(J') = \langle V \rangle \, , \qquad \left\langle \omega(J'), \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right\rangle + \widetilde{V}(\varphi, J') = 0. \tag{76.12}$$

La seconda equazione prende il nome di *equazione omologica* o *equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni.*

p.76.4 **76.4.** *Osservazione.* Se la (76.12) è soddisfatta allora si ha

76.10
$$\begin{cases} \dot{\varphi}' = \omega'(J') + O(\varepsilon^2) = \omega(J) + O(\varepsilon), \\ \dot{J}' = O(\varepsilon^2), \end{cases} \tag{76.13}$$

dove $\omega'(J) = (\partial/\partial J)(H_0(J)) + \varepsilon H_1'(J))$. Quindi su tempi $|t| < 1/\varepsilon$ si ha $|J'(t) - J'(0)| < O(\varepsilon)$.

Inoltre si ha $J - J' = O(\varepsilon)$ e quindi $J(t) - J'(t) = O(\varepsilon)$ per ogni t, così che anche

76.10
$$|J(t) - J(0)| \leq |J(t) - J'(t)| + |J'(t) - J'(0)| + |J'(0) - J(0)| = O(\varepsilon), \tag{76.14}$$

per tempi $|t| < 1/\varepsilon$. Quindi in realtà le variabili d'azione rimangono vicine (ordine ε) non solo fino a tempi ordine 1, ma fino a tempi ordine $1/\varepsilon$.

p.76.5 **76.5.** Per $N = 1$ si ha

76.11
$$W_1(\varphi, J) = -\frac{1}{\omega(J')} \int_0^{\varphi} \mathrm{d}\varphi \, \widetilde{V}(\varphi, J), \tag{76.15}$$

dove la costante d'integrazione è stata posta uguale a zero richiedendo (arbitrariamente) che $\langle W_1 \rangle = 0$. Infatti la seconda equazione in (76.12) ha un'unica soluzione a media nulla, come dimostra il seguente risultato.

p.76.6 **76.6.** TEOREMA. *Per $N = 1$ l'equazione omologica in (76.9) ha soluzione $H_1'(J') = \langle V \rangle$ e $W_1(\varphi, J')$ data dalla (76.3). Inoltre tale soluzione è unica se si richiede che $W_1(\cdot, J')$ abbia media nulla.*

p.76.7 **76.7.** *Dimostrazione.* Si verifica immediatemente che $H_1'(J') = \langle V \rangle$ e $W_1(\varphi, J')$ data dalla (76.3) costituiscono una soluzione. Poiché $\partial W_1/\partial\varphi$ ha media nulla si deve avere necessariamente $H_1'(J') = \langle V \rangle$, quindi la scelta di H_1' è unica. Supponiamo che esistano due funzioni distinte W_1 e W_1' soluzioni di

$$\omega(J') \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + \widetilde{V}(\varphi, J') = 0.$$

Allora si deve avere $\partial/\partial\varphi(W_1(\varphi, J') - W_1'(\varphi, J')) = 0$, quindi la funzione $W_1(\varphi, J') - W_1'(\varphi, J')$ deve essere costante in φ, i.e. $W_1'(\varphi, J') = W_1(\varphi, J') + c(J')$, per qualche funzione $c(J)$ indipendente da φ. Di conseguenza $\langle W_1'(\cdot, J') \rangle = \langle W_1(\cdot, J') \rangle + c(J') = c(J')$, poiché W_1 ha media nulla. Quindi se si richiede che anche W_1' abbia media nulla, si trova $W_1'(\varphi, J') = W_1(\varphi, J')$. ∎

p.76.8 **76.8.** *Osservazione.*

p.76.9 **76.9.** Per $N > 1$ si passa allo spazio di Fourier, sviluppando in serie la funzione $V(\varphi, J)$ secondo la (76.3) e cercando una soluzione

76.13
$$W_1(\varphi, J') = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^N} \mathrm{e}^{i\langle \nu, \varphi \rangle} W_{1,\nu}(J'), \tag{76.16}$$

con $W_{1,0} = \langle W_1 \rangle = 0$. Si trova quindi per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$

76.14
$$W_{1,\nu}(J') = i \frac{V_\nu(J')}{\langle \omega(J'), \nu \rangle}, \tag{76.17}$$

purché sia abbia $\langle \omega(J'), \nu \rangle \neq 0$.

Si noti che se $H_0 = \langle \omega, J \rangle$ allora $\omega(J) = \omega$ per ogni J.

p.76.10 **76.10.** DEFINIZIONE (CONDIZIONE DI NON RISONANZA). *Un vettore* $\omega \in \mathbb{R}^N$ *si dice* non risonante *se* $\langle \omega, \nu \rangle \neq 0$ *per ogni* $\nu \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$*, i.e. se le componenti di* ω *sono razionalmente indipenenti.*

p.76.11 **76.11.** La condizione che il vettore $\omega(J')$ sia *non risonante* è sufficiente perché i coefficienti di Fourier $W_{1,\nu}(J')$ della funzione $W_1(\varphi, J')$ siano ben definiti. Non è però sufficiente perché la funzione $W_1(\varphi, J')$ sia ben definita. Perché questo accada occorre anche che la serie di Fourier sia sommabile. Questo si può ottenere richiedendo una condizione di non risonanza più forte sul vettore $\omega(J')$.

Si definiscono *vettori diofantei* i vettori che verificano la condizione

76.15
$$|\langle \omega, \nu \rangle| > \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \qquad \forall \nu \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}, \tag{76.18}$$

con $\gamma > 0$ e $\tau > 0$. Le costanti γ, τ sono chiamate *esponenti diofantei*, e la condizione (76.18) è detta *condizione diofantea*.

Richiediamo che $J \to \omega(J)$ sia un diffeomorfismo. Diremo che una hamiltoniana $H_0(J)$ è *non degenere* o *isocrona* se

76.16
$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \right) \neq 0. \tag{76.19}$$

In tal caso $\omega(J)$ è invertibile, e quindi definisce un diffeomorfismo. La (76.19) è chiamata *condizione di anisocronia* o *condizione di non degenerazione*. Se la (76.19) è soddisfatta si dice che il sistema hamiltoniano con hamiltoniana $H_0(J)$ è *anisocrono*. Diremo invece che una hamiltoniana $H_0(J)$ è *degenere* o se il determinante in (76.19) è nullo.

Sia $\mathcal{A}$ un insieme aperto in $\mathbb{R}^N$: poniamo $\Omega = \omega(\mathcal{A})$.

p.76.12 **76.12.**

p.76.13 **76.13.** TEOREMA. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^N$*. Se* $\tau > N - 1$ *l'insieme*

$$\Omega_*(\gamma) = \left\{ \omega \in \Omega : |\langle \omega, \nu \rangle| > \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \quad \forall \nu \neq 0 \right\}$$

ha misura di Lebesgue $\operatorname{meas}(\Omega_*(\gamma))$ *tale che* $\operatorname{meas}(\Omega_*(\gamma)) = \operatorname{meas}(\Omega) - O(\gamma)$.

p.76.14 **76.14.** *Dimostrazione* Supponiamo per semplicità che Ω sia una sfera di raggio R. Definiamo

$$\overline{\Omega}(\gamma, \nu) = \left\{ \omega \in \Omega : |\langle \omega, \nu \rangle| \leq \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \right\}.$$

Si ha quindi

$$\Omega_*^c = \bigcup_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}^N\\ \nu\neq 0}} \overline{\Omega}(\gamma, n).$$

Per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$ abbiamo

76.18
$$\operatorname{meas}(\overline{\Omega}(\gamma,\nu)) \le CR^{N-1} \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}^N\\ \nu\neq 0}} \frac{\gamma}{|\nu|^{\tau+1}} \le CR^{N-1}\gamma \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}^N\\ |\nu|=m}} \frac{1}{m^{\tau+1}}, \tag{76.20}$$

per un'opportuna costante C. Nel derivare la (76.20) abbiamo tenuto conto che $\langle\omega,\nu\rangle/|\nu|$ è la proiezione del vettore ω lungo la direzione individuata dal vettore ν. Si ha

$$\operatorname{meas}(\overline{\Omega}(\gamma,\nu)) \le C'R^{N-1}\gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{N-1}}{m^{\tau+1}} \le C'R^{N-1}\gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\tau-N+2}},$$

e quindi, se $\tau > N-1$,

$$\frac{\operatorname{meas}(\overline{\Omega}(\gamma,\nu))}{\operatorname{meas}(\Omega)} \le C''R^{-1}\gamma,$$

per opportune costanti C' e C''. Da qui segue l'asserto. ∎

p.76.15 **76.15.** Definizione. *Data una funzione $V(\varphi,J)$, periodica in φ, consideriamo la sua serie di Fourier (76.3). Diremo che la funzione $V(\varphi,J)$ ha un'*espansione di Fourier generica *in $\mathcal{A}$ se si ha $V_\nu(J') \neq 0$ $\forall\nu\in\mathbb{Z}^N$ e $\forall J'\in\mathcal{A}$.*

p.76.16 **76.16.** *Osservazione.* La condizione che una funzione periodica abbia un'espansione di Fourier generica è una condizione di genericità (cfr. il paragrafo 30.26).

p.76.17 **76.17.** Teorema (Poincaré). *Se $V(\varphi,J)$ ha uno sviluppo generico in $\mathcal{A}$ e $H_0(J)$ è non degenere allora non esiste una soluzione $W_1(\varphi,J')$ regolare in $J\in\mathcal{A}$.*

p.76.18 **76.18.** *Dimostrazione.* La (76.9) può essere soddisfatta sole se $V_\nu(J')=0$ per ogni ν e ogni J' tale che $\langle\omega(J'),\nu\rangle = 0$. Questo non è possibile se $V(\varphi,J)$ ha uno sviluppo generico. ∎

p.76.19 **76.19.** *Osservazione.* Il teorema 76.17 è noto come *primo teorema di trivialità di Poincaré*

p.76.20 **76.20.** Perché la funzione (76.17) sia ben definita occorre che il vettore $\omega(J')$ soddisfi la condizione diofantea (76.19) per ogni J'. Un caso in cui questo accade è il caso dei sistemi isocroni (i.e. $\omega(J')=\omega$ per ogni J', con ω diofanteo) che sarà discusso più diffusamente nel prossimo paragrafo. Nel caso anisocrono, si può scrivere

$$\begin{gathered} V(\varphi,J) = V_{\le N}(\varphi,J) + V_{>N}(\varphi,J), \\ V_{\le N}(\varphi,J) = \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}^N\\ |\nu|\le N}} \mathrm{e}^{i\langle\nu,\varphi\rangle} V_\nu(J), \qquad V_{>N}(\varphi,J) = \sum_{\substack{\nu\in\mathbb{Z}^N\\ |\nu|>N}} \mathrm{e}^{i\langle\nu,\varphi\rangle} V_\nu(J), \end{gathered}$$

e scegliere $N = N_0$ tale che si abbia

76.19
$$\max_{(\varphi,J)\in D(\rho,\xi,J_0)} |V_{>N}(\varphi,J)| \leq C\varepsilon^2, \tag{76.21}$$

per qualche costante C. Questo è possibile purché si scelga $N = N_0(\varepsilon)$, dove

76.20
$$N_0(\varepsilon) = \frac{4}{\xi} \log \frac{1}{C_1\varepsilon}, \tag{76.22}$$

dove ξ è la semiampiezza della striscia di analiticità in φ della funzione $V(\varphi, I)$ e C_1 è un'opportuna costante; cfr. l'esercizio 4.

Tenendo conto che se $J' = J + O(\varepsilon) = J(0) + O(\varepsilon)$, con $J(0) = J_0$ tale che $\omega(J_0)$ sia diofanteo, si ha per $|\nu| \leq N_0(\varepsilon)$

$$|\langle\omega(J'),\nu\rangle| \geq |\langle\omega(J(0)),\nu\rangle| - |\langle\omega(J') - \omega(J(0),\nu\rangle| \geq \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} - |\langle\omega(J') - \omega(J(0),\nu\rangle|\,,$$

dove

$$|\langle\omega(J') - \omega(J(0),\nu\rangle| \leq B\,|J' - J(0)|\,|\nu| \leq \frac{\gamma}{2|\nu|^\tau}, \qquad B = \max\left|\frac{\partial\omega(J)}{\partial J}\right|$$

non appena si abbia

$$|J' - J(0)| \leq \frac{\gamma}{2B|N_0(\varepsilon)|^{\tau+1}} \leq \frac{\gamma}{2B|\nu|^{\tau+1}}.$$

Questo richiede

$$|J' - J(0)|^{\tau+1} \leq \text{const.}\frac{1}{\log 1/\varepsilon},$$

che è sicuramente soddisfatta per ε sufficientemente piccolo.

sec.77
77. Teoria perturbativa a tutti gli ordini

p.77.1 **77.1. Introduzione.**

p.77.2 **77.2.** Diremo che

77.1
$$F(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^k F_k, \tag{77.1}$$

è una serie formale se i coefficienti F_k sono ben definiti per ogni $k \geq 0$. Quindi una serie formale si può identificare con la successione dei suoi coefficienti.

Consideriamo un sistema isocrono perturbato: quindi $H_0(J) = \langle \omega, J \rangle$. Cerchiamo una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi della forma

77.2
$$W(\varphi, J') = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k W_k(\varphi, J'), \qquad H'(\varphi', J') = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k H_k(J') + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{77.2}$$

dove $W_0(\varphi, J') = \langle \varphi, J' \rangle$ e $H'_0(J') = H_0(J')$.

A ogni ordine $k \le n$ si trova

77.3
$$\left\langle \omega, \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + N_k(\varphi, J') = H'_k(J'), \tag{77.3}$$

dove

77.4
$$N_k(\varphi, J') = \sum_{1 \le |a| \le k-1} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J') {\sum}'_{k-1} \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i}(\varphi, J'), \tag{77.4}$$

e si è posto $a = (a_1, \ldots, a_N)$, $|a| = a_1 + \ldots + a_N$, $\partial J^a = \partial J_1^{a_1} \ldots \partial J_N^{a_N}$ e $a! = a_1! \ldots a_N!$, con $a_i \ge 0$ intero per ogni i, e la somma $\sum'_{k-1}$ indica la somma su tutti gli indici k_{ij}, con $i = 1, \ldots, N$ e $j = 1, \ldots, a_i$, tali che $k_{11}, \ldots, k_{1a_1}, \ldots, k_{N1}, \ldots, k_{Na_N} \ge 1$ e $k_{11} + \ldots + k_{1a_1} + \ldots + k_{N1} + \ldots + k_{Na_N} = k - 1$.

Si noti che a ogni ordine k la funzione N_k dipende dalle funzioni $W_1, \ldots, W_{k-1}$, quindi è una funzione nota se le $W_{k'}$, $k' < k$, sono state risolte ai passi precedenti. In altre parole la (77.3) si può risolvere iterativamente, ponendo

77.5
$$H'_k(J') = \langle N_k \rangle, \qquad \left\langle \omega, \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + \widetilde{N}_k(\varphi, J') = 0, \tag{77.5}$$

dove $\widetilde{N}_k = N_k - \langle N_k \rangle$, per $k = 1, \ldots, n$.

Introduciamo i domini

77.6
$$D_k := D(\rho(1 - k\delta), \xi - k\delta, J_0), \tag{77.6}$$

con $D(\rho, \xi, J_0)$ definito in (76.2), e le norme

77.7
$$\|f(\varphi, J)\|_k = \max_{(\varphi, J) \in D_k} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial J} \right| + \frac{1}{\rho(1 - k\delta)} \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right| \right), \tag{77.7}$$

per δ e k tali che $1 - k\delta \ge c$ e $\xi - k\delta \ge \xi c$, con $c > 0$: e.g. si può fissare $c = 1/2$.

È facile verificare che

77.8
$$\left| \frac{\partial V_\nu(J)}{\partial J} \right| \le \|V\|_0 e^{-\xi|\nu|}, \qquad |\nu V_\nu(J)| \le \rho \|V\|_0 e^{-\xi|\nu|}, \tag{77.8}$$

così che

77.8a
$$|W_{1,\nu}(J')| \le \gamma^{-1}|\nu|^{\tau-1}\,|\nu V_\nu(J')| \le \rho\gamma^{-1}|\nu|^{\tau-1}\|V\|_0 \mathrm{e}^{-\xi|\nu|}, \tag{77.9}$$

e quindi (cfr. l'esercizio 13)

77.9
$$\begin{aligned} \max_{(\varphi,J)\in D_1} |W_1(\varphi,J)| &\le \sum_{\nu\neq 0} \gamma^{-1}|\nu|^{\tau-1}|\nu V_\nu(J)|\,\mathrm{e}^{(\xi-\delta)|\boldsymbol{\nu}|} \\ &\le B_1\rho\gamma^{-1}\|V\|_0\delta^{-N-\tau+1}, \end{aligned} \tag{77.10}$$

per un'opportuna costante B_1. Allo stesso modo si trova

77.11
$$\max_{(\varphi,J)\in D_1}\left|\frac{\partial W_1(\varphi,J)}{\partial\varphi}\right| \le B_0\gamma^{-1}\delta^{-N-\tau-1}\max_{(\varphi,J)\in D_0}|N_1(\varphi,J)|, \tag{77.11}$$

con $N_1 = V$, per un'opportuna costante B_0. Quindi si ha

77.10
$$\|W_1\|_2 \le B_2\gamma^{-1}\|V\|_0\delta^{-N-\tau} \tag{77.12}$$

per un'opportuna costante B_2. Si ha infine

77.12
$$\max_{(\varphi,J)\in D_2}\left|\frac{\partial^2 W_1(\varphi,J)}{\partial\varphi\,\partial J}\right| \le B_3\gamma^{-1}\delta^{-N-\tau-1}\|V\|_0, \tag{77.13}$$

per qualche costante B_3. Al primo ordine la trasformazione $(\varphi',J')\to(\varphi,J)$ è definita da

77.13
$$J' = J + \Xi(\varphi,J), \qquad \varphi' = \varphi + \Delta(\varphi,J), \tag{77.14}$$

dove possiamo scrivere

77.14
$$\Xi(\varphi,J) = -\varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial\varphi}(\varphi,J'), \qquad \Delta(\varphi,J) = \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial J'}(\varphi,J'). \tag{77.15}$$

Le equazioni (77.15) possono essere risolte tramite il teorema della funzione implicita. Infatti la condizione (77.13) permette di fissare J' in termini di (φ,J) in accordo con (77.14), che definisce la funzione $\Xi(\varphi,J)$, tale che $\|\Xi\|_2 \le |\varepsilon|\,B_2\rho\gamma^{-1}\|V\|_0\delta^{-N-\tau-1}$ (cfr. l'esercizio 9). Si può allora scrivere $J' = J + \Xi(\varphi,J)$ nella seconda equazione in (77.15) e questo permette di fissare anche φ' in termini di (φ,J), definendo così la funzione $\Delta(\varphi,J)$, tale che $\|\Delta\|_2 \le |\varepsilon|\,B_2\gamma^{-1}\|V\|_0\delta^{-N-\tau-1}$.

p.77.3 **77.3.** LEMMA. *Siano $\delta>0$ e $n\in\mathbb{N}$ tali che $(n+1)\delta\le 1/2$. A ogni ordine $k\le n$ si trova*

77.15
$$\max_{(\varphi,J)\in D_k}\left|\frac{\partial W_k}{\partial\varphi}(\varphi,J)\right| \le AB^k k!\,\delta^{-\beta k}, \qquad \beta = \tau+N+1, \tag{77.16}$$

per opportune costanti A e B. Si trova in particolare

77.16
$$A = \frac{\rho\delta}{4}, \qquad B = b_0 2^N\gamma^{-1}\|V\|_0, \tag{77.17}$$

dove b_0 è una costante universale.

p.77.4 **77.4.** *Dimostrazione.* Per $k=1$, definendo A come in (77.17), la (77.10) implica immediatamente la (77.16) purché $B \ge 4B_2\gamma^{-1}\|V\|_0$. Assumendo le (77.16) per $k' \le k$, si trova allora per $(\varphi, J') \in D_{k+1}$ (cfr. la (77.4))

77.17
$$\begin{aligned}|N_{k+1}(\varphi, J')| &\le \sum_{1\le|a|\le k} \|V\|_0 \frac{1}{(\rho\delta)^{|a|-1}} {\sum}_k' \prod_{i=1}^{N} A^{a_i} \prod_{j=1}^{a_i} k_{ij}! B^{k_{ij}} \delta^{-\beta k_{ij}} \\ &\le \|V\|_0 \sum_{p=1}^{k} \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_N\ge 0\\ a_1+\ldots+a_N=p}} \frac{A^p}{(\rho\delta)^{p-1}} B^k \delta^{-\beta k} {\sum}_k' k_{ij}! \\ &\le \|V\|_0 \rho\delta (k+1)! B^k \delta^{-\beta k} \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{A}{\rho\delta}\right)^p 2^{N+p} \\ &\le \|V\|_0 \rho\delta (k+1)! B^k 2^N \delta^{-\beta k} \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{2A}{\rho\delta}\right)^p,\end{aligned} \tag{77.18}$$

dove si è usato il fatto che (cfr. l'esercizio 10)

77.18
$${\sum}_k' k_{ij}! \le k! \le (k+1)!, \tag{77.19}$$

il fatto che (cfr. l'esercizio 11)

77.19
$$\sum_{\substack{a_1,\ldots,a_N\ge 0\\ a_1+\ldots+a_N=p}} 1 = \sum_{m=1}^{N} \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_m\ge 1\\ a_1+\ldots+a_m=p}} 1 = \sum_{m=1}^{N} \binom{N}{m}\binom{p}{m} \le 2^{N+p}, \tag{77.20}$$

e infine il teorema di Cauchy per stimare (cfr. l'esercizio 13)

77.20
$$\begin{aligned}\frac{1}{a!} \max_{(\varphi,J)\in D_k} \left| \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J) \right| &\le \max_{(\varphi,J)\in D_0} \left| \frac{\partial V}{\partial J}(\varphi, J) \right| \frac{1}{(\rho - \rho(1-\delta))^{|a|-1}} \\ &\le \|V\|_0 (\rho\delta)^{-(|a|-1)}.\end{aligned} \tag{77.21}$$

Quindi, scegliendo A come in (77.17), si trova

77.21
$$\max_{(\varphi,J)\in D_k} |N_{k+1}(\varphi, J)| \le 4\|V\|_0 (k+1)! B^k 2^N A \delta^{-\beta k}. \tag{77.22}$$

D'altra parte, ragionando come per ottenere la (77.11), si trova

77.22
$$\max_{(\varphi,J)\in D_{k+1}} \left| \frac{\partial W_{k+1}(\varphi, J)}{\partial \varphi} \right| \le B_0 \gamma^{-1} \delta^{-N-\tau-1} \max_{(\varphi,J)\in D_k} |N_{k+1}(\varphi, J)|, \tag{77.23}$$

che, combinata con la (77.22), dà

77.23
$$\max_{(\varphi,J)\in D_{k+1}}\left|\frac{\partial W_{k+1}(\varphi,J)}{\partial\varphi}\right|\le A\left(4B_0\|V\|_0\gamma^{-1}2^N\right)B^k\delta^{-\beta(k+1)}\,(k+1)!. \qquad (77.24)$$

Quindi la stima (77.16) segue immediatamente prendendo

7.24
$$B=\max\{4B_0\gamma^{-1}2^N\|V\|_0,4B_2\gamma^{-1}\|V\|_0\}. \qquad (77.25).$$

Ovviamente le stime sopra hanno senso fin tanto che, per esempio, $\xi-k\delta\ge\xi/2$ e $\rho(1-k\delta)\ge\rho/2$ per ogni $k\le n+1$. ■

p.77.5 **77.5.** TEOREMA. *Consideriamo il sistema descritto dalla hamiltoniana* $H(\varphi,J)=\langle\omega,J\rangle+\varepsilon V(\varphi,J)$, *con* ω *che soddisfa la condizione diofantea (76.18). Si ha allora*

$$|J(t)-J(0)|\le A\varepsilon^a \qquad \forall|t|<\mathrm{e}^{B/\varepsilon^b},$$

per opportune costanti a,b,A,B. *Si può scegliere* $a=1/2$ *e* $b=1/2(\tau+N+3)$.

p.77.6 **77.6.** *Dimostrazione.* Fissiamo

77.25
$$n=N(\varepsilon),\qquad \delta=\frac{\xi}{2N(\varepsilon)}, \qquad (77.26)$$

con $N(\varepsilon)$ da determinare successivamente, e applichiamo il Lemma 77.3.

Dalla (7.22) si ha

77.26
$$|\langle N_k\rangle|\le 2^N\delta\rho\|V\|_0k!B^k\delta^{-\beta(k-1)}. \qquad (77.27)$$

e quindi (cfr. l'esercizio 14)

77.27
$$H(\varphi',J')=\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}H_k(J')+O(\varepsilon^{N(\varepsilon)}N(\varepsilon)!\delta^{-\beta N(\varepsilon)}), \qquad (77.28)$$

così che l'errore è di ordine $(\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1})^{N(\varepsilon)}$: questo vuol dire che le variabili J' restano costanti (entro $O(\varepsilon)$) fino a un tempo di ordine $1/\varepsilon(\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1})^{N(\varepsilon)}$, i.e. $J'(t)-J'(0)=O(\varepsilon)$ per $|t|<\varepsilon^{-1}(\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1})^{-N(\varepsilon)}$. Inoltre si ha

77.28
$$J=J'+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(W_1(\varphi,J')+\ldots+W_{N(\varepsilon)}(\varphi,J')\right), \qquad (77.29)$$

quindi (usando che $k!\le k^k\le N(\varepsilon)^k$ per $k\le N(\varepsilon)$; cfr. l'esercizio 15)

77.29
$$\begin{aligned}|J-J'|&\le A\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\left(B\delta^{-\beta}\varepsilon\right)^k k!\\&\le\frac{\rho\delta}{4}\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\left(b_02^N\gamma^{-1}\|V\|_0\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1}\right)^k\\&\le\text{const.}\delta\gamma^{-1}\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1},\end{aligned} \qquad (77.30)$$

purché si scelga

77.30
$$b_0 2^N \gamma^{-1} \|V\|_0 \varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1} \le \frac{1}{2}. \tag{77.31}$$

Si può per esempio fissare $N(\varepsilon)$ tale che

77.31
$$\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1} = \sqrt{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/2(\beta+1)}, \tag{77.32}$$

così che $J - J' = O(\sqrt{\varepsilon})$. In conclusione si ha $J(t) - J(0) = O(\sqrt{\varepsilon})$ per tempi t tali che

77.32
$$|t| \le C_2 \left(\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1}\right)^{-N(\varepsilon)} = C_2 \mathrm{e}^{B\varepsilon^{-1/2(\beta+2)}}. \tag{77.33}$$

Da qui segue l'asserto, con $a = 1/2$ e $b = 1/2(\beta+2)$, per opportune costanti A e B. ■

p.77.7 **77.7.** *Osservazione.* Il teorema 77.3 costituisce una versione del teorema di Nechorošev nel caso di perturbazioni di sistemi isocroni. Il risultato in realtà vale in casi molto più generali, come vedremo nel prossimo capitolo.

p.77.8 **77.8.** *Osservazione.* Nel caso di perturbazioni di oscillatori armonici, la teoria perturbativa si può spingere a ogni ordine, e si può quindi definire, formalmente,

77.33
$$W(\varphi, J') = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k W_k(\varphi, J'), \qquad H'(J') = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k H'_k(J'). \tag{77.34}$$

Le serie (77.34) prendono il nome di *serie di Birkhoff.*

Quindi le serie di Birkhoff sono ben definite a tutti gli ordini della teoria perturbativa. Tuttavia in generale le serie di Birkhoff divergono (esempio degli esercizi 5÷8).

p.77.9 **77.9.** Consideriamo ora il caso di sistemi anisocroni e richiediamo che la condizione (76.19) sia soddisfatta.

Sotto l'ipotesi che l'equazione omologica ammetta soluzione a ogni ordine, allora si può ancora scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi all'ordine k in forma analoga alla (77.3), con la differenza che ora $\omega(J)$ non è costante, quindi N_k riceve contributi anche dal termine $H_0(J)$ della hamiltoniana. Si ha quindi

77.34
$$\left\langle \omega(J'), \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + N_k(\varphi, J') = H'_k(J'), \tag{77.35}$$

dove

77.35
$$\begin{aligned} N_k(\varphi, J') = & \sum_{2\le|a|\le k} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} H_0(\varphi, J') \sum_{\sum' k_{ij}=k} \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i}(\varphi, J'), \\ & + \sum_{1\le|a|\le k-1} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J') \sum_{\sum' k_{ij}=k-1} \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i}(\varphi, J'), \end{aligned} \tag{77.36}$$

con lo stesso significato dei simboli della (77.4). Si noti che anche nei termini della prima riga della (77.36) c'è dipendenza solo da $W_{k'}$ con $k' < k$ a causa del vincolo $|a| \geq 2$.

La principale difficoltà ora è che, come già anticipato al paragrafo 76.20, per risolvere l'equazione omologica si deve controllare $\langle \omega(J'), \nu \rangle$ per $\nu \in \mathbb{Z}^N \neq \{0\}$ e J' in un insieme aperto.

p.77.10 **77.10.** Il seguente risultato è noto come *secondo teorema di trivialità di Poincaré* o *torema di non esistenza di Poincaré.*

p.77.11 **77.11.** TEOREMA. *In generale il sistema dinamico descritto dall'Hamiltoniana (76.1) non ammette altre costanti del moto che dipendano analiticamente da ε oltre l'energia.*

p.77.12 **77.12.** *Dimostrazione.* Supponiamo che esista una costante del moto $F(\varphi, J, \varepsilon)$ analiticia in ε: quindi $F(\varphi, J, \varepsilon) = F_0(\varphi, J) + \varepsilon F_1(\varphi, J) + \varepsilon^2 F_2(\varphi, J) + \ldots$.

La condizione $\{F, J\} = 0$ implica, all'ordine zero in ε,

$$0 = \{F_0, H_0\} = \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial \varphi}, \omega(J) \right\rangle,$$

quindi $\langle \omega(J), \nu \rangle F_{0,\nu}(J) = 0$ per ogni $\nu \neq 0$. Poiché $\det \partial\omega/\partial J \neq 0$ allora $\langle \omega(J), \nu \rangle \neq 0$ su un insieme denso e quindi $F_{0,\nu}(J) = 0$ per ogni $\nu \neq 0$. Ne segue che $F_0(\varphi, J) = F_0(J)$ è indipendente da φ.

Al primo ordine la condizione $\{F, J\} = 0$ dà

$$0 = \left\langle \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}, \omega(J) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial J}, \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right\rangle,$$

che, espressa nello spazio di Fourier, diventa

$$0 = \langle \nu, \omega(J) \rangle F_{1,\nu}(J) - \langle \nu, \frac{\partial F_0}{\partial J}(J) \rangle V_\nu(J).$$

Quindi sono possibili due casi: $V_\nu(J) = \langle \omega(J), \nu \rangle \tilde{V}_\nu(J)$ per qualche $\tilde{V}_\nu(J)$, che però corrisponde a una condizione non generica, oppure $\langle \omega(J), \nu \rangle = 0$ deve implicare $\langle \nu, \partial F_0(J)/\partial J \rangle = 0$. Di conseguenza i vettori $\omega(J)$ e $\langle \nu, \partial F_0(J)/\partial \rangle$ devono essere paralleli, ovvero

$$\frac{\partial F_0}{\partial J}(J) \rangle = \lambda(J)\, \omega(J),$$

per qualche funzione $\lambda(J)$, così che $\lambda(J) = \Lambda'(H_0(J))$ e $F_0(J) = \Lambda(H_0(J))$ per qualche funzione Λ. Si ottiene allora

$$\langle \omega, \nu \rangle \left(\lambda(J) V_\nu(J) - F_{1,\nu}(J) \right) = 0,$$

che implica $F_1(\varphi, J) = \lambda(J)\, V(\varphi, J) + C_1(J)$, per qualche funzione C_1. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} F(\varphi, J) &= \Lambda(H_0(J)) + \varepsilon \Lambda'(H_0(J))\, \varepsilon\, V(\varphi, J) + \varepsilon\, C_1 + O(\varepsilon^2) \\ &= \Lambda(H_0(J) + \varepsilon\, V(\varphi, J)) + \varepsilon\, C_1 + O(\varepsilon^2) = \Lambda(H(\varphi, J)) + \varepsilon\, C_1 + O(\varepsilon^2) \\ &= \Lambda(H(\varphi, J)) + \varepsilon \left[F_0'(\varphi, J) + \varepsilon F_1'(\varphi, J) + O(\varepsilon^2) \right], \end{aligned}$$

dove $F' = F_0' + \varepsilon F_1' + \ldots$ è una costante del moto. Ripetendo l'argomento si trova $F'(\varphi, J) = \Lambda_1(H(\varphi, J)) + \varepsilon\, F''(\varphi, J)$, dove F'' è ancora una costante del moto. Iterando si ottiene $F(\varphi, J) = \Lambda(H(\varphi, J)) + \varepsilon\, \Lambda_1(H(\varphi, J)) + \varepsilon^2 \Lambda_2(H(\varphi, J)) + \ldots$, e quindi, per analiticità, $F(\varphi, J) = \Lambda_\varepsilon(\varphi, J)$ per un'opportuna funzione Λ_ε. ■

p.77.13 **77.13.** Solo recentemente la convergenza delle serie perturbative è stata dimostrata (sotto le assunzioni di non degenerazione e di anisocronia), anche se la teoria perturbativa è stata a lungo utilizzata in astronomia (trovando un buon accordo con i dati sperimentali). Le serie perturbative prendono il nome di *serie di Lindstedt*.

Un metodo alternativo per studiare la convergenza delle serie perturbative è quello introdotto nei paragrafi precendenti, che, quindi, consiste nel definire la trasformazione canonica che porta in variabili in cui la hamiltoniana dipenda solo dalla variabili d'azione come composizione di infinite trasformazioni canoniche. Questo porta al teorema KAM. Grosso modo tale teorema afferma che, sotto le ipotesi fatte su $H_0(J)$, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ la maggior parte dei tori invarianti sopravvive.

Un enunciato formale è il seguente (il teorema sarà dimostrato e discusso nel prossimo capitolo).

p.77.14 **77.14.** TEOREMA *Si consideri il sistema descritto dalla hamiltoniana (76.1), con H_0 e V funzioni analitiche in un dominio*

77.36
$$D(\xi, \rho, J_0) = \Big\{ (\varphi, J) \in \mathbb{C}^{2N} : |J_k - J_{0,k}| \le \rho,\ \mathrm{Re}(\varphi_k) \in \mathbb{T},\ |\mathrm{Im}(\varphi_k)| \le \xi \Big\}, \quad (77.37)$$

e si assuma che

77.37
$$|\langle \omega(J_0), \nu \rangle| \ge \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}, \qquad \sup_{D(\xi,\rho,J_0)} \left| \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial^2 J} \right)^{-1} \right| \le \eta, \qquad (77.38)$$

per opportune costanti positive γ, τ, η. Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ esistono due funzioni α e β, analitiche in $\mathbb{T}^N$ e a valori in $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{T}^N$, rispettivamente, tali che il toro

77.38
$$J = \alpha(\psi), \qquad \varphi = \psi + \beta(\psi), \qquad \psi \in \mathbb{T}^N, \qquad (77.39)$$

descritto per $\psi \to \psi + t\omega(J_0)$, è invariante per il sistema.

p.77.15 **77.15.** *Osservazione.* Inoltre i tori sono analitici in ε. Ovviamente questo implica la convergenza delle serie perturbative per i tori. Altrettanto ovviamente, la serie perturbativa per la funzione generatrice non converge, perché altrimenti questo implicherebbe l'integrabilità del sistema perturbato.

p.77.16 **77.16.** *Osservazione.* Si può inoltre dimostrare che i tori invarianti che sopravvivono alla perturbazione riempiono una parte dello spazio delle fasi che ha misura relativa grande, i.e. che tende a 1 quando ε tende a 0. Per questo i sistemi che si ottengono perturbando sistemi integrabili si dicono sistemi quasi-integrabili.

sec.78

78. Un esempio semplice di teoria perturbativa

p.78.1 **78.1. Introduzione.** Consideriamo per $N = 1$ il sistema descritto dalla hamiltoniana

78.1
$$H(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) + \frac{1}{4}\varepsilon\, k\, q^4, \tag{78.1}$$

dove $k > 0$ ed ε è il parametro perturbativo.

Con la trasformazione (75.3) la hamiltoniana diventa

78.2
$$H(\varphi, J) = \omega J + \varepsilon\, \alpha\, J^2 \sin^4\varphi, \qquad \alpha = \frac{k}{m^2\omega^2}. \tag{78.2}$$

Si ha quindi, al primo ordine,

78.3
$$H_1'(J) = \alpha J^2 \left\langle \sin^4\varphi \right\rangle = \frac{3}{8}\alpha J^2, \tag{78.3}$$

dove si è usato che (cfr. l'esercizio 16)

78.4
$$\left\langle \sin^4\varphi \right\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \sin^4\varphi = \frac{3}{8}. \tag{78.4}$$

Inoltre (cfr. l'esercizio 16)

78.5
$$\begin{aligned} W_1(\varphi, J') &= -\frac{1}{\omega}\int_0^{\varphi} \mathrm{d}\psi\, \alpha (J')^2 \left(\sin^4\psi - \left\langle \sin^4\psi \right\rangle\right) \\ &= \frac{\alpha (J')^2}{\omega}\left(\frac{3}{8}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi\right). \end{aligned} \tag{78.5}$$

In termini delle nuove variabili le equazioni di Hamilton sono

78.6
$$\dot{\varphi}' = \frac{\partial H'(J')}{\partial J'} + O(\varepsilon^2), \qquad \dot{J}' = -O(\varepsilon^2), \tag{78.6}$$

con $H'(J') = H_0(J') + \varepsilon H_1'(J') + O(\varepsilon^2)$, che dànno

78.7
$$\varphi'(t) = \varphi'(0) + \left(\omega + \varepsilon\omega_1(J'(0))\right) t + O(\varepsilon^2), \qquad J'(t) = J'(0) + O(\varepsilon^2), \tag{78.7}$$

dove

78.8
$$\omega_1(J') = \frac{\partial H_1'}{\partial J}(J') = \frac{3}{4}\alpha J'. \tag{78.8}$$

Dobbiamo esprimere $(\varphi'(0), J'(0))$ in termini di $(\varphi(0), J(0))$ e, infine, $(\varphi(t), J(t))$ in termini di $(\varphi'(t), J'(t))$.

Dobbiamo quindi calcolare la trasformazione canonica che ha $W(\varphi, J') = \varphi J' + \varepsilon W_1(\varphi, J')$ come funzione generatrice (di seconda spacie).

Si ha, per definizione,

78.9
$$J = J' + \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}, \qquad \varphi' = \varphi + \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial J'}, \tag{78.9}$$

da cui si ricava

78.10
$$\begin{aligned} J &= J' + \varepsilon\frac{\alpha}{\omega}(J')^2\left(\frac{3}{8}\cos^2\varphi - \frac{3}{8}\sin^2\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^4\varphi\right) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi' &= \varphi + 2\varepsilon\frac{\alpha}{\omega}J'\left(\frac{3}{8}\sin\varphi\,\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin^3\varphi\,\cos\varphi\right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{78.10}$$

da cui ricaviamo immediatamente la trasformazione di coordinate

78.11
$$\begin{aligned} J' &= J - \varepsilon\frac{\alpha}{\omega}J^2\left(\frac{3}{8}\cos^2\varphi - \frac{3}{8}\sin^2\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^4\varphi\right) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi' &= \varphi + 2\varepsilon\frac{\alpha}{\omega}J\left(\frac{3}{8}\sin\varphi\,\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin^3\varphi\,\cos\varphi\right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{78.11}$$

e la sua inversa

78.12
$$\begin{aligned} J &= J' + \varepsilon\frac{\alpha}{\omega}(J')^2\left(\frac{3}{8}\cos^2\varphi - \frac{3}{8}\sin^2\varphi + \frac{3}{4}\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^4\varphi\right) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi &= \varphi' - 2\varepsilon\frac{\alpha}{\omega}J'\left(\frac{3}{8}\sin\varphi'\cos\varphi' + \frac{1}{4}\sin^3\varphi'\cos\varphi'\right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{78.12}$$

dove, al solito, i termini di ordine superiore al primo sono trascurati.

p.78.2 **78.2.** Inoltre si tenga conto che, scrivendo in (78.12) $\varphi = \varphi' + \varepsilon\varphi_1 + O(\varepsilon^2)$ e $J = J' + \varepsilon J_1 + O(\varepsilon^2)$ e ponendo $\omega_1 = \omega_1(J'(0))$, si ha

78.13
$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin(\varphi'(0) + \omega t + \varepsilon\omega_1 t + \varepsilon\varphi_1) \\ &= \sin(\varphi'(0) + \omega t)\,\cos(\varepsilon\omega_1 t + \varepsilon\varphi_1) + \cos(\varphi'(0) + \omega t)\,\sin(\varepsilon\omega_1 t + \varepsilon\varphi_1) + O(\varepsilon^2) \\ &= \sin(\varphi'(0) + \omega t) + \varepsilon\,(\omega_1 t + \varphi_1)\cos(\varphi'(0) + \omega t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{78.13}$$

dove (cfr. la (78.11))

78.14
$$\varphi'(0) = \varphi(0) + 2\varepsilon\frac{\alpha}{\omega}J(0)\left(\frac{3}{8}\sin\varphi(0)\,\cos\varphi(0) + \frac{1}{4}\sin^3\varphi(0)\,\cos\varphi(0)\right) + O(\varepsilon^2). \tag{78.14}$$

e, allo stesso modo,

78.15
$$
\begin{aligned}
\sqrt{J} &= \sqrt{J' + \varepsilon J_1 + O(\varepsilon^2)} = \sqrt{J'(0) + \varepsilon J_1 + O(\varepsilon^2)} \\
&= \sqrt{J'(0)} \left(1 + \varepsilon \frac{J_1}{J'(0)} \right) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}
\tag{78.15}
$$

dove (cfr. di nuovo la (78.11))

78.16
$$
\begin{aligned}
J'(0) = J(0) - \varepsilon \frac{\alpha}{\omega} J^2(0) & \left(\frac{3}{8} \cos^2 \varphi(0) - \frac{3}{8} \sin^2 \varphi(0) \right. \\
& \left. + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi(0) \cos^2 \varphi(0) - \frac{1}{4} \sin^4 \varphi(0) \right) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}
\tag{78.16}
$$

p.78.3 **78.3.** Alla fine, utilizzando le (78.7), (78.11) e (78.12), ed esprimendo (q, p) in funzione di (φ, J) attraverso la (78.3), troviamo $(q(t), p(t))$.

p.78.4 **78.4.**

Nota bibliografica

Esercizi

Esercizio 1. Dimostrare che in variabili azione-angolo la hamiltoniana dell'oscillatore armonico ha la forma (75.2). [*Suggerimento.* Si tenga conto dell'esercizio 16 del Capitolo 18 e si verifichi che $a_1 = \sqrt{m/k}$, con $k = m\omega^2$.]

Esercizio 2. Dimostrare la stima (76.3).

Esercizio 3. Scrivere la perturbazione nella hamiltoniana (76.5) in variabili azione-angolo.

Esercizio 4. Dimostrare la stima (76.21) se si sceglie $N = N_0(\varepsilon)$ in accordo con la (76.22).

Esercizio 5. Si consideri la hamiltoniana

$$
H(\varphi, J) = J_1 + \alpha J_2 + \varepsilon \left(J_2 + F(\varphi_1, \varphi_2) \right),
$$

dove $(1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ è un vettore diofanteo e

$$
F(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} \mathrm{e}^{i \langle \nu, \varphi \rangle} F_\nu
$$

è analitica. Calcolare esplicitamente la serie di Birkhoff. [*Suggerimento.* Si trova $H_1'(J') = J_2'$ e $H_k'(J') = 0$ per $k \geq 2$, mentre

$$
W_k(\varphi, J') = - \sum_{\nu \neq 0} \mathrm{e}^{i \langle \nu, \varphi \rangle} \frac{F_\nu}{i \langle \omega, \nu \rangle} \left(- \frac{\nu_2}{\langle \omega, \nu \rangle} \right)^{k-1}
$$

per $k \geq 1$.]

Esercizio 6. Si dimostri che i coefficienti di ordine k della serie di Birkhoff dell'esercizio 5 si stimano proporzionalmente a $k!^{\tau+1}$. [*Suggerimento.* Si trova che $|W_{k,\nu}(J')|$ si stima proporzionalmente a $|\nu|^{\tau+(k-1)(\tau+1)}$ e si usa che $(k(\tau+1))! \leq C^k k!^{\tau+1}$ per un'opportuna costante C.]

Esercizio 7. Dimostrare che i moti del sistema descritto dalla hamiltoniana $H(\varphi, J)$ dell'esercizio 5 divergono linearmente nel tempo e dedurne che le serie di Birhkoff divergono. [*Suggerimento.* Integrare esplicitamente le equazioni di Hamilton.]

Esercizio 8. Si consideri la hamiltoniana dell'esercizio 5. Dimostrare che la soluzione formale dell'equazione di Hamilton-Jacobi è data da

$$\begin{aligned} H'(J') &= J_1' + \alpha J_2' + \varepsilon\, J_2' + \varepsilon\, F_0, \\ W(\varphi, J') &= \varphi_1 J_1' + \varphi_2 J_2' + i\varepsilon \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^2 \\ \nu \neq 0}} \mathrm{e}^{i\langle \nu, \varphi\rangle} \frac{F_\nu}{\nu_1 + \nu_2(\alpha+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Dedurne che le serie di Birkhoff divergono.

Esercizio 9. Dimostrare che la condizione (77.13) permette di risolvere le (77.15) con il teorema della funzione implicita. [*Suggerimento.* Definendo $G(J, J, \varphi) = J' - J + \varepsilon(\partial W_1/\partial\varphi)(\varphi, J')$, si considera l'equazione $G(J, J', \varphi) = 0$. Si ha allora $\partial G/\partial J' = \mathbb{1} + \varepsilon(\partial^2 W_1/\partial\varphi\partial J)$ e quindi $|\det(\partial G/\partial J')| \geq 1/2$ purché $\varepsilon B_3 \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-n-\tau-1} < 1/2$.]

Esercizio 10. Dimostrare la (77.19). [*Suggerimento.* Si dimostra per induzione che $k_1! \ldots k_s! \leq (k-(s-1))!$ se $k = k_1 + \ldots + k_s$ e $k_1, \ldots, k_s \geq 1$. Per $s = 1$ la stima è banale, per $s > 1$ si ha

$$k_1! \ldots k_s! \leq k_1! \ldots k_{s-1}! k_s! \leq (\tilde{k} - (s-2))! k_s! \leq (\tilde{k} + k_s - (s-2) - 1)!$$

dove $\tilde{k} = k_1 + \ldots + k_{s-1} = k - k_s$. La somma su $k_1! \ldots k_s!$ con i vincoli sopra si può quindi stimare con il numero di modi di scegliere $s-1$ numeri tra k per il massimo di $k_1! \ldots k_s!$, quindi

$$\sum_{\substack{k_1, \ldots, k_s \geq 1 \\ k_1 + \ldots + k_s = k}} k_1! \ldots k_s! \leq \binom{k}{s-1} (k-(s-1))! \leq k!$$

Esercizio 11. Dimostrare la (77.20). [*Suggerimento.* Poiché $a_1, \ldots, a_N \geq 0$ e $a_1 + \ldots + a_N = p$, esiste m tale che $1 \leq m \leq N$, $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m} \geq 1$, $a_{i_1} + \ldots + a_{i_M} = p$, mentre i restanti a_i sono nulli. La somma su $a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}$ che verificano tali condizioni si può stimare con la somma dei possibili modi di fissare m punti tra p dati. Infine si può stimare

$$\binom{p}{m} \leq 2^p, \qquad \sum_{m=1}^{N} \binom{N}{m} = 2^N,$$

e questo completa la dimostrazione.]

Esercizio 12. Si ricordi il teorema di Cauchy: data una funzione $f(z)$, analitica in un aperto $D \subset \mathbb{C}^2$ e continua sulla frontiera ∂D, si ha

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta,$$

dove l'integrale è esteso alla curva ∂D. Dedurne che, se $D' \subset D$ e $z \in D'$, si ha

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n f}{\partial z}(z)\right| \le \frac{M}{\delta^n},$$

dove M è il massimo del modulo di $f(z)$ in D e δ è la distanza tra D' e ∂D.

Esercizio 13. Si utilizzi il teorema di Cauchy per dimostrare le (77.10) e (77.19).

Esercizio 14. Dimostrare la (77.28).

Esercizio 15. Dimostrare che $k! \le k^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. [*Suggerimento.* Si usi la formula di Stirling o, più semplicemente, si noti che $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot k \le k \cdot k \cdot k \ldots \cdot k = k^k$.]

Esercizio 16. Dimostrare le (78.4) e (78.5). [*Soluzione.* Si ha

$$\int \mathrm{d}\varphi\, \sin^4\varphi = \int \mathrm{d}\varphi\, \sin^2\varphi \left(1 - \cos^2\varphi\right) = \int \mathrm{d}\varphi\, \sin^2\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\int \mathrm{d}\varphi \sin^4\varphi,$$

e quindi

$$\int \mathrm{d}\varphi\, \sin^4\varphi = \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi\right).$$

In particolare si ha $\langle \sin^4\varphi \rangle = 3/8$.]

Capitolo 20. Teorema KAM

*sec.*79

79. Aaa

*p.*79.1 **79.1. Introduzione.**

*p.*79.2 **79.2.**

*p.*79.3 **79.3.**

*p.*79.4 **79.4.**

*p.*79.5 **79.5.**

*p.*79.6 **79.6.**

*sec.*80

80. Bbb

*p.*80.1 **80.1. Introduzione.**

*p.*80.2 **80.2.**

*p.*80.3 **80.3.** TEOREMA.

*p.*80.4 **80.4.** *Dimostrazione.*

*p.*80.5 **80.5.**

*p.*80.6 **80.6.** *Osservazione.*

*p.*80.7 **80.7.**

*p.*80.8 **80.8.**

*p.*80.9 **80.9.**

*p.*80.10 **80.10.**

sec.81

81. Ccc

p.81.1 **81.1. Introduzione.**

p.81.2 **81.2.**

p.81.3 **81.3.** TEOREMA.

p.81.4 **81.4.** *Dimostrazione.*

p.81.5 **81.5.**

p.81.6 **81.6.** *Osservazione.*

sec.82

82. Ddd

p.82.1 **82.1. Introduzione.**

p.82.2 **82.2.**

p.82.3 **82.3.** TEOREMA.

p.82.4 **82.4.** *Dimostrazione.*

p.82.5 **82.5.**

p.82.6 **82.6.** *Osservazione.*

Nota bibliografica

Esercizi

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.

Esercizio 5.

Esercizio 6.

Esercizio 7.

Esercizio 8.

Bibliografia ragionata

• I testi di riferimento di base, che si sono tenuti principalmente presenti nel testo, sono i seguenti:

[1] G. Dell'Antonio: *Elementi di Meccanica*, Liguori, Napoli, 1996. [Dell'Antonio].

[2] V.I. Arnol'd: *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma, 1979. [Arnol'd2].

[3] A. Fasano, S. Marmi: *Meccanica Analitica*, Boringhieri, Torino, 1994. [Fasano-Marmi].

• Per alcuni argomenti specifici si sono tenuti presenti anche:

[4] M. W. Hirsch, S. Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974. [Hirsch-Smale].

[5] G. Gallavotti: *Meccanica Elementare*, Boringhieri, Torino, 1980. [Gallavotti].

[6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz: *Meccanica*, Editori Riuniti, Roma, 1976. [Landau-Lifshitz].

[7] T. Levi-Civita, U. Amaldi: *Lezioni di Meccanica Elementare*, Zanichelli, Bologna, 1947. [Levi-Civita-Amaldi].

[8] H. Goldstein: *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1980. [Goldstein].

[9] V.I. Arnol'd: *Équations Différentielles Ordinaires*, MIR, Mosca, 1974. [Arnol'd1].

[10] L. Benfatto, R. Raimondi, E. Scoppola: *Meccanica Analitica*, Dispense del Corso di Meccanica Analitica e Statistica, diponibili in rete.

[11] A. Berretti: *Varietà simplettiche*, Dispense del Corso di Meccanica Razionale, disponibili in rete.

[12] G. Benettin, F. Fassò: *Il teorema di Liouville-Arnold*, Dispense del Corso di

Meccanica Razionale, disponibili in rete.

• Per richiami di Analisi, di Geometria e di Algebra si può consultare qualsiasi testo sull'argomento. Noi, a titolo puramente indicativo, abbiamo fatto riferimento a:

[13] E. Giusti: *Analisi Matematica 1*, Boringhieri, Torino, 1985. [Giusti1].

[14] E. Giusti: *Analisi Matematica 2*, Boringhieri, Torino, 1983. [Giusti2].

[15] S. Lang: *Algebra Lineare*, Boringhieri, Torino, 1970. [Lang].

[16] A.G. Kuroš: *Corso di Algebra Superiore*, Editori Riuniti, Roma, 1977. [Kuroš].

[17] E. Martinelli: *Il metodo delle coordinate*, Veschi, Roma, 1984. [Martinelli].

[18] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov: *Modern geometry – Methods and applications. Part III. Introduction to homology theory*, Graduate Texts in Mathematics, 124, Springer-Verlag, New York, 1990. [Dubrovin-Fomenko-Novikov]

Questo è tutto.

Indice analitico

Indice dei nomi

Indice delle materie