

Capitolo 19. Teoria delle perturbazioni

sec.75 75. Oscillatore armonico in variabili azione-angolo

p.75.1 **75.1. Introduzione.**

p.75.2 **75.2.** Variabili azione-angolo per l'oscillatore armonico. La hamiltoniana

75.1
$$H(p, q) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2) \quad (75.1)$$

diventa (cfr. l'esercizio 1)

75.2
$$K(J) = \omega J, \quad (75.2)$$

con la trasformazione canonica

75.3
$$q = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}} \sin \varphi, \quad p = \sqrt{2Jm\omega} \cos \varphi. \quad (75.3)$$

La funzione generatrice (di seconda specie) è

75.4
$$F(q, J) = \int_{q_0}^q \sqrt{2m\omega J - m^2 \omega^2 q^2}. \quad (75.4)$$

Si noti infatti che, derivando la (75.4) rispetto a J , si trova

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial J} = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - (x')^2}}, \quad x = q \sqrt{\frac{m\omega}{2J}},$$

e prendendo $x_0 = 0$ (che equivale a fissare l'origine dei tempi) si trova $\varphi = \arcsin x$, in accordo con la (75.3).

p.75.3 **75.3.** L'oscillatore armonico è un sistema integrabile. Inoltre è un *sistema isocrono*: la frequenza ω non dipende dall'azione. Tale condizione prende il nome di *condizione di isocronia*.

p.75.4 **75.4.**

sec.76

76. Teoria perturbativa al primo ordine

p.76.1 **76.1. Introduzione.**p.76.2 **76.2.** Teoria perturbativa. Teoria perturbativa al primo ordine. Studiamo sistemi descritti da hamiltoniane della forma

76.1
$$H(\varphi, J) = H_0(J) + \varepsilon V(\varphi, J), \quad (76.1)$$

con $H_0(J)$ integrabile. Chiamiamo ε *parametro perturbativo*.

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre richiesto la minima regolarità possibile, per esempio che la hamiltoniana fosse di classe C^2 . Al contrario in questo e il prossimo capitolo richiederemo che la hamiltoniana sia una funzione analitica dei suoi argomenti. Più precisamente assumiamo che le funzioni H_0 e V in (76.1) siano analitiche nel dominio

76.1a
$$D(\rho, \xi, J_0) = \left\{ (\varphi, I) \in \mathbb{C}^{2n} : \operatorname{Re} \varphi_i \in \mathbb{T}, \quad |\operatorname{Im} \varphi_i| \leq \xi, \quad |J_i - J_{0i}| \leq \rho \right\}. \quad (76.2)$$

In particolare, si può espandere $V((\varphi, I)$ in serie di Fourier in φ ,

76.12
$$V(\varphi, J) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^N} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} V_\nu(J), \quad (76.3)$$

dove i coefficienti di Fourier $V_\nu(J)$ decadono esponenzialmente in ν , i.e. si ha (cfr. l'esercizio 2).

76.12a
$$|V_\nu(J)| \leq \Phi e^{-\xi|\nu|}, \quad \Phi = \max_{(\varphi, J) \in D(\rho, \xi, J_0)} |V(\varphi, J)|. \quad (76.4)$$

Come esempio della (76.1) consideriamo, in coordinate cartesiane,

76.2
$$H(q, p) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} (p_k^2 + m_k^2 \omega_k^2 q_k^2) + \frac{\alpha}{4} \sum_{1 \leq k \neq j \leq N} (q_k - q_j)^4, \quad (76.5)$$

che diventa della forma (76.1) dopo il riscalamento $(q, p) \rightarrow (q', p')$, con $q = \delta q'$ e $p = \delta p'$, definendo $\varepsilon = \delta^2$ e dividendo la hamiltoniana per ε . In particolare si ha

76.3
$$H_0(J) = \sum_{k=1}^N \omega_k J_k = \langle \omega, J \rangle. \quad (76.6)$$

In termini delle variabili riscalate (q', p') le variabili azione-angolo sono definite come in (75.3). In particolare si ha $q'_k = \sqrt{2J_k/m_k\omega_k} \sin \varphi_k$ e $p'_k = \sqrt{2J_k m_k \omega_k} \cos \varphi_k$.

Si vede allora facilmente che la parte integrabile assume la forma (76.6), mentre la perturbazione diventa una funzione sia di φ sia di J (cfr. l'esercizio 3).

p.76.3 **76.3.** Cerchiamo di risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi scrivendo la funzione caratteristica di Hamilton $W(\varphi, J')$ nella forma

$$76.4 \quad W(\varphi, J') = \langle \varphi, J' \rangle + \varepsilon W_1(\varphi, J') + O(\varepsilon^2), \quad (76.7)$$

trascurando sistematicamente gli ordini in ε superiore al primo.

Cerchiamo quindi una trasformazione (canonica) di coordinate $(\varphi, J) \rightarrow (\varphi', J')$, tale che $H(\varphi, J) = H'(J') + O(\varepsilon^2)$ per un'opportuna funzione H' , i.e. tale che il sistema sia integrabile almeno fino al secondo ordine. Si ottiene

$$76.5 \quad H_0 \left(J' + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right) + \varepsilon V(\varphi, J') + O(\varepsilon^2) = H'(J') := H'_0(J') + \varepsilon H'_1(J') + O(\varepsilon^2), \quad (76.8)$$

che porta a identificare $H'_0(J') = H_0(J')$ e

$$76.6 \quad \left\langle \omega(J'), \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right\rangle + V(\varphi, J') = H'_1(J'), \quad (76.9)$$

dove

$$76.7 \quad \omega(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J}(J) \quad (76.10)$$

definisce l'applicazione frequenza.

Definiamo la *media* di una funzione $F(\varphi, J')$, periodica nei suoi N argomenti φ , come

$$76.8 \quad \langle F \rangle = \langle F(\cdot, J') \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} \frac{d\varphi}{(2\pi)^N} F(\varphi, J'), \quad (76.11)$$

e poniamo $\tilde{F}(\varphi, J') = F(\varphi, J') - \langle F \rangle$.

Quindi al primo ordine la (76.9) diventa

$$76.9 \quad H'_1(J') = \langle V \rangle, \quad \left\langle \omega(J'), \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right\rangle + \tilde{V}(\varphi, J') = 0. \quad (76.12)$$

La seconda equazione prende il nome di *equazione omologica* o *equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni*.

p.76.4 **76.4. Osservazione.** Se la (76.12) è soddisfatta allora si ha

$$76.10 \quad \begin{cases} \dot{\varphi}' = \omega'(J') + O(\varepsilon^2) = \omega(J) + O(\varepsilon), \\ \dot{J}' = O(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (76.13)$$

dove $\omega'(J) = (\partial/\partial J)(H_0(J)) + \varepsilon H'_1(J)$. Quindi su tempi $|t| < 1/\varepsilon$ si ha $|J'(t) - J'(0)| < O(\varepsilon)$.

Inoltre si ha $J - J' = O(\varepsilon)$ e quindi $J(t) - J'(t) = O(\varepsilon)$ per ogni t , così che anche

$$76.10 \quad |J(t) - J(0)| \leq |J(t) - J'(t)| + |J'(t) - J'(0)| + |J'(0) - J(0)| = O(\varepsilon), \quad (76.14)$$

per tempi $|t| < 1/\varepsilon$. Quindi in realtà le variabili d'azione rimangono vicine (ordine ε) non solo fino a tempi ordine 1, ma fino a tempi ordine $1/\varepsilon$.

p.76.5 **76.5.** Per $N = 1$ si ha

$$76.11 \quad W_1(\varphi, J) = -\frac{1}{\omega(J')} \int_0^\varphi d\varphi \tilde{V}(\varphi, J), \quad (76.15)$$

dove la costante d'integrazione è stata posta uguale a zero richiedendo (arbitrariamente) che $\langle W_1 \rangle = 0$. Infatti la seconda equazione in (76.12) ha un'unica soluzione a media nulla, come dimostra il seguente risultato.

p.76.6 **76.6. TEOREMA.** Per $N = 1$ l'equazione omologica in (76.9) ha soluzione $H'_1(J') = \langle V \rangle$ e $W_1(\varphi, J')$ data dalla (76.3). Inoltre tale soluzione è unica se si richiede che $W_1(\cdot, J')$ abbia media nulla.

p.76.7 **76.7. Dimostrazione.** Si verifica immediatamente che $H'_1(J') = \langle V \rangle$ e $W_1(\varphi, J')$ data dalla (76.3) costituiscono una soluzione. Poiché $\partial W_1 / \partial \varphi$ ha media nulla si deve avere necessariamente $H'_1(J') = \langle V \rangle$, quindi la scelta di H'_1 è unica. Supponiamo che esistano due funzioni distinte W_1 e W'_1 soluzioni di

$$\omega(J') \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + \tilde{V}(\varphi, J') = 0.$$

Allora si deve avere $\partial / \partial \varphi (W_1(\varphi, J') - W'_1(\varphi, J')) = 0$, quindi la funzione $W_1(\varphi, J') - W'_1(\varphi, J')$ deve essere costante in φ , i.e. $W'_1(\varphi, J') = W_1(\varphi, J') + c(J')$, per qualche funzione $c(J')$ indipendente da φ . Di conseguenza $\langle W'_1(\cdot, J') \rangle = \langle W_1(\cdot, J') \rangle + c(J') = c(J')$, poiché W_1 ha media nulla. Quindi se si richiede che anche W'_1 abbia media nulla, si trova $W'_1(\varphi, J') = W_1(\varphi, J')$. ■

p.76.8 **76.8. Osservazione.**

p.76.9 **76.9.** Per $N > 1$ si passa allo spazio di Fourier, sviluppando in serie la funzione $V(\varphi, J)$ secondo la (76.3) e cercando una soluzione

$$76.13 \quad W_1(\varphi, J') = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^N} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} W_{1,\nu}(J'), \quad (76.16)$$

con $W_{1,0} = \langle W_1 \rangle = 0$. Si trova quindi per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$

$$76.14 \quad W_{1,\nu}(J') = i \frac{V_\nu(J')}{\langle \omega(J'), \nu \rangle}, \quad (76.17)$$

purché sia abbia $\langle \omega(J'), \nu \rangle \neq 0$.

Si noti che se $H_0 = \langle \omega, J \rangle$ allora $\omega(J) = \omega$ per ogni J .

p.76.10 **76.10.** DEFINIZIONE (CONDIZIONE DI NON RISONANZA). *Un vettore $\omega \in \mathbb{R}^N$ si dice non risonante se $\langle \omega, \nu \rangle \neq 0$ per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$, i.e. se le componenti di ω sono razionalmente indipendenti.*

p.76.11 **76.11.** La condizione che il vettore $\omega(J')$ sia *non risonante* è sufficiente perché i coefficienti di Fourier $W_{1,\nu}(J')$ della funzione $W_1(\varphi, J')$ siano ben definiti. Non è però sufficiente perché la funzione $W_1(\varphi, J')$ sia ben definita. Perché questo accada occorre anche che la serie di Fourier sia sommabile. Questo si può ottenere richiedendo una condizione di non risonanza più forte sul vettore $\omega(J')$.

Si definiscono *vettori diofantei* i vettori che verificano la condizione

$$76.15 \quad |\langle \omega, \nu \rangle| > \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}, \quad (76.18)$$

con $\gamma > 0$ e $\tau > 0$. Le costanti γ, τ sono chiamate *esponenti diofantei*, e la condizione (76.18) è detta *condizione diofantea*.

Richiediamo che $J \rightarrow \omega(J)$ sia un diffeomorfismo. Diremo che una hamiltoniana $H_0(J)$ è *non degenera* o *isocrona* se

$$76.16 \quad \det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} \right) \neq 0. \quad (76.19)$$

In tal caso $\omega(J)$ è invertibile, e quindi definisce un diffeomorfismo. La (76.19) è chiamata *condizione di anisocronia* o *condizione di non degenerazione*. Se la (76.19) è soddisfatta si dice che il sistema hamiltoniano con hamiltoniana $H_0(J)$ è *anisocrono*. Diremo invece che una hamiltoniana $H_0(J)$ è *degenera* o se il determinante in (76.19) è nullo.

Sia \mathcal{A} un insieme aperto in \mathbb{R}^N : poniamo $\Omega = \omega(\mathcal{A})$.

p.76.12 **76.12.**

p.76.13 **76.13.** TEOREMA. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^N . Se $\tau > N - 1$ l'insieme*

$$\Omega_*(\gamma) = \left\{ \omega \in \Omega : |\langle \omega, \nu \rangle| > \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \quad \forall \nu \neq 0 \right\}$$

ha misura di Lebesgue $\text{meas}(\Omega_(\gamma))$ tale che $\text{meas}(\Omega_*(\gamma)) = \text{meas}(\Omega) - O(\gamma)$.*

p.76.14 **76.14.** *Dimostrazione* Supponiamo per semplicità che Ω sia una sfera di raggio R . Definiamo

$$\bar{\Omega}(\gamma, \nu) = \left\{ \omega \in \Omega : |\langle \omega, \nu \rangle| \leq \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \right\}.$$

Si ha quindi

$$\Omega_*^c = \bigcup_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^N \\ \nu \neq 0}} \bar{\Omega}(\gamma, n).$$

Per ogni $\nu \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$ abbiamo

$$76.18 \quad \text{meas}(\bar{\Omega}(\gamma, \nu)) \leq CR^{N-1} \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^N \\ \nu \neq 0}} \frac{\gamma}{|\nu|^{\tau+1}} \leq CR^{N-1} \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^N \\ |\nu|=m}} \frac{1}{m^{\tau+1}}, \quad (76.20)$$

per un'opportuna costante C . Nel derivare la (76.20) abbiamo tenuto conto che $\langle \omega, \nu \rangle / |\nu|$ è la proiezione del vettore ω lungo la direzione individuata dal vettore ν . Si ha

$$\text{meas}(\bar{\Omega}(\gamma, \nu)) \leq C'R^{N-1} \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{N-1}}{m^{\tau+1}} \leq C'R^{N-1} \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\tau-N+2}},$$

e quindi, se $\tau > N - 1$,

$$\frac{\text{meas}(\bar{\Omega}(\gamma, \nu))}{\text{meas}(\Omega)} \leq C''R^{-1} \gamma,$$

per opportune costanti C' e C'' . Da qui segue l'asserto. ■

p.76.15 **76.15. DEFINIZIONE.** *Data una funzione $V(\varphi, J)$, periodica in φ , consideriamo la sua serie di Fourier (76.3). Diremo che la funzione $V(\varphi, J)$ ha un'espansione di Fourier generica in \mathcal{A} se si ha $V_\nu(J') \neq 0 \forall \nu \in \mathbb{Z}^N$ e $\forall J' \in \mathcal{A}$.*

p.76.16 **76.16. Osservazione.** La condizione che una funzione periodica abbia un'espansione di Fourier generica è una condizione di genericità (cfr. il paragrafo 30.26).

p.76.17 **76.17. TEOREMA (POINCARÉ).** *Se $V(\varphi, J)$ ha uno sviluppo generico in \mathcal{A} e $H_0(J)$ è non degenere allora non esiste una soluzione $W_1(\varphi, J')$ regolare in $J \in \mathcal{A}$.*

p.76.18 **76.18. Dimostrazione.** La (76.9) può essere soddisfatta solo se $V_\nu(J') = 0$ per ogni ν e ogni J' tale che $\langle \omega(J'), \nu \rangle = 0$. Questo non è possibile se $V(\varphi, J)$ ha uno sviluppo generico. ■

p.76.19 **76.19. Osservazione.** Il teorema 76.17 è noto come *primo teorema di trivialità di Poincaré*

p.76.20 **76.20.** Perché la funzione (76.17) sia ben definita occorre che il vettore $\omega(J')$ soddisfi la condizione diofantea (76.19) per ogni J' . Un caso in cui questo accade è il caso dei sistemi isocroni (i.e. $\omega(J') = \omega$ per ogni J' , con ω diofanteo) che sarà discusso più diffusamente nel prossimo paragrafo. Nel caso anisocrono, si può scrivere

$$\begin{aligned} V(\varphi, J) &= V_{\leq N}(\varphi, J) + V_{> N}(\varphi, J), \\ V_{\leq N}(\varphi, J) &= \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^N \\ |\nu| \leq N}} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} V_\nu(J), \quad V_{> N}(\varphi, J) = \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^N \\ |\nu| > N}} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} V_\nu(J), \end{aligned}$$

e scegliere $N = N_0$ tale che si abbia

$$76.19 \quad \max_{(\varphi, J) \in D(\rho, \xi, J_0)} |V_{>N}(\varphi, J)| \leq C\varepsilon^2, \quad (76.21)$$

per qualche costante C . Questo è possibile purché si scelga $N = N_0(\varepsilon)$, dove

$$76.20 \quad N_0(\varepsilon) = \frac{4}{\xi} \log \frac{1}{C_1 \varepsilon}, \quad (76.22)$$

dove ξ è la semiampiezza della striscia di analiticità in φ della funzione $V(\varphi, I)$ e C_1 è un'opportuna costante; cfr. l'esercizio 4.

Tenendo conto che se $J' = J + O(\varepsilon) = J(0) + O(\varepsilon)$, con $J(0) = J_0$ tale che $\omega(J_0)$ sia diofanteo, si ha per $|\nu| \leq N_0(\varepsilon)$

$$|\langle \omega(J'), \nu \rangle| \geq |\langle \omega(J(0)), \nu \rangle| - |\langle \omega(J') - \omega(J(0)), \nu \rangle| \geq \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} - |\langle \omega(J') - \omega(J(0)), \nu \rangle|,$$

dove

$$|\langle \omega(J') - \omega(J(0)), \nu \rangle| \leq B |J' - J(0)| |\nu| \leq \frac{\gamma}{2|\nu|^\tau}, \quad B = \max \left| \frac{\partial \omega(J)}{\partial J} \right|$$

non appena si abbia

$$|J' - J(0)| \leq \frac{\gamma}{2B|N_0(\varepsilon)|^{\tau+1}} \leq \frac{\gamma}{2B|\nu|^{\tau+1}}.$$

Questo richiede

$$|J' - J(0)|^{\tau+1} \leq \text{const.} \frac{1}{\log 1/\varepsilon},$$

che è sicuramente soddisfatta per ε sufficientemente piccolo.

sec.77

77. Teoria perturbativa a tutti gli ordini

p.77.1 **77.1. Introduzione.**

p.77.2 **77.2. Diremo che**

$$77.1 \quad F(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_n, \quad (77.1)$$

è una serie formale se i coefficienti F_k sono ben definiti per ogni $k \geq 0$. Quindi una serie formale si può identificare con la successione dei suoi coefficienti.

Consideriamo un sistema isocrono perturbato: quindi $H_0(J) = \langle \omega, J \rangle$. Cerchiamo una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi della forma

$$77.2 \quad W(\varphi, J') = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k W_k(\varphi, J'), \quad H'(\varphi', J') = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k H_k(J') + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (77.2)$$

dove $W_0(\varphi, J') = \langle \varphi, J' \rangle$ e $H'_0(J') = H_0(J')$.

A ogni ordine $k \leq n$ si trova

$$77.3 \quad \left\langle \omega, \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + N_k(\varphi, J') = H'_k(J'), \quad (77.3)$$

dove

$$77.4 \quad N_k(\varphi, J') = \sum_{1 \leq |a| \leq k-1} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J') \sum'_{k-1} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi^i}(\varphi, J'), \quad (77.4)$$

e si è posto $a = (a_1, \dots, a_N)$, $|a| = a_1 + \dots + a_N$, $\partial J^a = \partial J_1^{a_1} \dots \partial J_N^{a_N}$ e $a! = a_1! \dots a_N!$, con $a_i \geq 0$ intero per ogni i , e la somma \sum'_{k-1} indica la somma su tutti gli indici k_{ij} , con $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, a_i$, tali che $k_{11}, \dots, k_{1a_1}, \dots, k_{N1}, \dots, k_{Na_N} \geq 1$ e $k_{11} + \dots + k_{1a_1} + \dots + k_{N1} + \dots + k_{Na_N} = k - 1$.

Si noti che a ogni ordine k la funzione N_k dipende dalle funzioni W_1, \dots, W_{k-1} , quindi è una funzione nota se le $W_{k'}$, $k' < k$, sono state risolte ai passi precedenti. In altre parole la (77.3) si può risolvere iterativamente, ponendo

$$77.5 \quad H'_k(J') = \langle N_k \rangle, \quad \left\langle \omega, \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + \tilde{N}_k(\varphi, J') = 0, \quad (77.5)$$

dove $\tilde{N}_k = N_k - \langle N_k \rangle$, per $k = 1, \dots, n$.

Introduciamo i domini

$$77.6 \quad D_k := D(\rho(1 - k\delta), \xi - k\delta, J_0), \quad (77.6)$$

con $D(\rho, \xi, J_0)$ definito in (76.2), e le norme

$$77.7 \quad \|f(\varphi, J)\|_k = \max_{(\varphi, J) \in D_k} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial J} \right| + \frac{1}{\rho(1 - k\delta)} \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right| \right), \quad (77.7)$$

per δ e k tali che $1 - k\delta \geq c$ e $\xi - k\delta \geq \xi c$, con $c > 0$: e.g. si può fissare $c = 1/2$.

È facile verificare che

$$77.8 \quad \left| \frac{\partial V_\nu(J)}{\partial J} \right| \leq \|V\|_0 e^{-\xi|\nu|}, \quad |\nu V_\nu(J)| \leq \rho \|V\|_0 e^{-\xi|\nu|}, \quad (77.8)$$

così che

$$77.8a \quad |W_{1,\nu}(J')| \leq \gamma^{-1} |\nu|^{\tau-1} |\nu V_\nu(J')| \leq \rho \gamma^{-1} |\nu|^{\tau-1} \|V\|_0 e^{-\xi|\nu|}, \quad (77.9)$$

e quindi (cfr. l'esercizio 13)

$$77.9 \quad \begin{aligned} \max_{(\varphi, J) \in D_1} |W_1(\varphi, J)| &\leq \sum_{\nu \neq 0} \gamma^{-1} |\nu|^{\tau-1} |\nu V_\nu(J)| e^{(\xi-\delta)|\nu|} \\ &\leq B_1 \rho \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-N-\tau+1}, \end{aligned} \quad (77.10)$$

per un'opportuna costante B_1 . Allo stesso modo si trova

$$77.11 \quad \max_{(\varphi, J) \in D_1} \left| \frac{\partial W_1(\varphi, J)}{\partial \varphi} \right| \leq B_0 \gamma^{-1} \delta^{-N-\tau-1} \max_{(\varphi, J) \in D_0} |N_1(\varphi, J)|, \quad (77.11)$$

con $N_1 = V$, per un'opportuna costante B_0 . Quindi si ha

$$77.10 \quad \|W_1\|_2 \leq B_2 \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-N-\tau} \quad (77.12)$$

per un'opportuna costante B_2 . Si ha infine

$$77.12 \quad \max_{(\varphi, J) \in D_2} \left| \frac{\partial^2 W_1(\varphi, J)}{\partial \varphi \partial J} \right| \leq B_3 \gamma^{-1} \delta^{-N-\tau-1} \|V\|_0, \quad (77.13)$$

per qualche costante B_3 . Al primo ordine la trasformazione $(\varphi', J') \rightarrow (\varphi, J)$ è definita da

$$77.13 \quad J' = J + \Xi(\varphi, J), \quad \varphi' = \varphi + \Delta(\varphi, J), \quad (77.14)$$

dove possiamo scrivere

$$77.14 \quad \Xi(\varphi, J) = -\varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}(\varphi, J'), \quad \Delta(\varphi, J) = \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial J'}(\varphi, J'). \quad (77.15)$$

Le equazioni (77.15) possono essere risolte tramite il teorema della funzione implicita. Infatti la condizione (77.13) permette di fissare J' in termini di (φ, J) in accordo con (77.14), che definisce la funzione $\Xi(\varphi, J)$, tale che $\|\Xi\|_2 \leq |\varepsilon| B_2 \rho \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-N-\tau-1}$ (cfr. l'esercizio 9). Si può allora scrivere $J' = J + \Xi(\varphi, J)$ nella seconda equazione in (77.15) e questo permette di fissare anche φ' in termini di (φ, J) , definendo così la funzione $\Delta(\varphi, J)$, tale che $\|\Delta\|_2 \leq |\varepsilon| B_2 \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-N-\tau-1}$.

p.77.3 **77.3. LEMMA.** *Siano $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che $(n+1)\delta \leq 1/2$. A ogni ordine $k \leq n$ si trova*

$$77.15 \quad \max_{(\varphi, J) \in D_k} \left| \frac{\partial W_k}{\partial \varphi}(\varphi, J) \right| \leq AB^k k! \delta^{-\beta k}, \quad \beta = \tau + N + 1, \quad (77.16)$$

per opportune costanti A e B . Si trova in particolare

$$77.16 \quad A = \frac{\rho \delta}{4}, \quad B = b_0 2^N \gamma^{-1} \|V\|_0, \quad (77.17)$$

dove b_0 è una costante universale.

p.77.4 **77.4. Dimostrazione.** Per $k = 1$, definendo A come in (77.17), la (77.10) implica immediatamente la (77.16) purché $B \geq 4B_2\gamma^{-1}\|V\|_0$. Assumendo le (77.16) per $k' \leq k$, si trova allora per $(\varphi, J') \in D_{k+1}$ (cfr. la (77.4))

$$\begin{aligned}
 |N_{k+1}(\varphi, J')| &\leq \sum_{1 \leq |a| \leq k} \|V\|_0 \frac{1}{(\rho\delta)^{|a|-1}} \sum'_k \prod_{i=1}^N A^{a_i} \prod_{j=1}^{a_i} k_{ij}! B^{k_{ij}} \delta^{-\beta k_{ij}} \\
 &\leq \|V\|_0 \sum_{p=1}^k \sum_{\substack{a_1, \dots, a_N \geq 0 \\ a_1 + \dots + a_N = p}} \frac{A^p}{(\rho\delta)^{p-1}} B^k \delta^{-\beta k} \sum'_k k_{ij}! \\
 &\leq \|V\|_0 \rho \delta (k+1)! B^k \delta^{-\beta k} \sum_{p=1}^k \left(\frac{A}{\rho\delta}\right)^p 2^{N+p} \\
 &\leq \|V\|_0 \rho \delta (k+1)! B^k 2^N \delta^{-\beta k} \sum_{p=1}^k \left(\frac{2A}{\rho\delta}\right)^p,
 \end{aligned} \tag{77.18}$$

dove si è usato il fatto che (cfr. l'esercizio 10)

$$\sum'_k k_{ij}! \leq k! \leq (k+1)!, \tag{77.19}$$

il fatto che (cfr. l'esercizio 11)

$$\sum_{\substack{a_1, \dots, a_N \geq 0 \\ a_1 + \dots + a_N = p}} 1 = \sum_{m=1}^N \sum_{\substack{a_1, \dots, a_m \geq 1 \\ a_1 + \dots + a_m = p}} 1 = \sum_{m=1}^N \binom{N}{m} \binom{p}{m} \leq 2^{N+p}, \tag{77.20}$$

e infine il teorema di Cauchy per stimare (cfr. l'esercizio 13)

$$\frac{1}{a!} \max_{(\varphi, J) \in D_k} \left| \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J) \right| \leq \max_{(\varphi, J) \in D_0} \left| \frac{\partial V}{\partial J}(\varphi, J) \right| \frac{1}{(\rho - \rho(1-\delta))^{|a|-1}} \leq \|V\|_0 (\rho\delta)^{-(|a|-1)}. \tag{77.21}$$

Quindi, scegliendo A come in (77.17), si trova

$$\max_{(\varphi, J) \in D_k} |N_{k+1}(\varphi, J)| \leq 4\|V\|_0 (k+1)! B^k 2^N A \delta^{-\beta k}. \tag{77.22}$$

D'altra parte, ragionando come per ottenere la (77.11), si trova

$$\max_{(\varphi, J) \in D_{k+1}} \left| \frac{\partial W_{k+1}(\varphi, J)}{\partial \varphi} \right| \leq B_0 \gamma^{-1} \delta^{-N-\tau-1} \max_{(\varphi, J) \in D_k} |N_{k+1}(\varphi, J)|, \tag{77.23}$$

che, combinata con la (77.22), dà

$$77.23 \quad \max_{(\varphi, J) \in D_{k+1}} \left| \frac{\partial W_{k+1}(\varphi, J)}{\partial \varphi} \right| \leq A (4B_0 \|V\|_0 \gamma^{-1} 2^N) B^k \delta^{-\beta(k+1)} (k+1)!. \quad (77.24)$$

Quindi la stima (77.16) segue immediatamente prendendo

$$77.24 \quad B = \max\{4B_0 \gamma^{-1} 2^N \|V\|_0, 4B_2 \gamma^{-1} \|V\|_0\}. \quad (77.25).$$

Ovviamente le stime sopra hanno senso fin tanto che, per esempio, $\xi - k\delta \geq \xi/2$ e $\rho(1 - k\delta) \geq \rho/2$ per ogni $k \leq n+1$. ■

p.77.5 **77.5. TEOREMA.** Consideriamo il sistema descritto dalla hamiltoniana $H(\varphi, J) = \langle \omega, J \rangle + \varepsilon V(\varphi, J)$, con ω che soddisfa la condizione diofantea (76.18). Si ha allora

$$|J(t) - J(0)| \leq A\varepsilon^a \quad \forall |t| < e^{B/\varepsilon^b},$$

per opportune costanti a, b, A, B . Si può scegliere $a = 1/2$ e $b = 1/2(\tau + N + 3)$.

p.77.6 **77.6. Dimostrazione.** Fissiamo

$$77.25 \quad n = N(\varepsilon), \quad \delta = \frac{\xi}{2N(\varepsilon)}, \quad (77.26)$$

con $N(\varepsilon)$ da determinare successivamente, e applichiamo il Lemma 77.3.

Dalla (7.22) si ha

$$77.26 \quad |\langle N_k \rangle| \leq 2^N \delta \rho \|V\|_0 k! B^k \delta^{-\beta(k-1)}. \quad (77.27)$$

e quindi (cfr. l'esercizio 14)

$$77.27 \quad H(\varphi', J') = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} H_k(J') + O(\varepsilon^{N(\varepsilon)} N(\varepsilon)! \delta^{-\beta N(\varepsilon)}), \quad (77.28)$$

così che l'errore è di ordine $(\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1})^{N(\varepsilon)}$: questo vuol dire che le variabili J' restano costanti (entro $O(\varepsilon)$) fino a un tempo di ordine $1/\varepsilon(\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1})^{N(\varepsilon)}$, i.e. $J'(t) - J'(0) = O(\varepsilon)$ per $|t| < \varepsilon^{-1}(\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1})^{-N(\varepsilon)}$. Inoltre si ha

$$77.28 \quad J = J' + \frac{\partial}{\partial \varphi} (W_1(\varphi, J') + \dots + W_{N(\varepsilon)}(\varphi, J')), \quad (77.29)$$

quindi (usando che $k! \leq k^k \leq N(\varepsilon)^k$ per $k \leq N(\varepsilon)$; cfr. l'esercizio 15)

$$77.29 \quad \begin{aligned} |J - J'| &\leq A \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} (B\delta^{-\beta}\varepsilon)^k k! \\ &\leq \frac{\rho\delta}{4} \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} (b_0 2^N \gamma^{-1} \|V\|_0 \varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1})^k \\ &\leq \text{const.} \delta \gamma^{-1} \varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1}, \end{aligned} \quad (77.30)$$

purché si scelga

$$77.30 \quad b_0 2^N \gamma^{-1} \|V\|_0 \varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1} \leq \frac{1}{2}. \quad (77.31)$$

Si può per esempio fissare $N(\varepsilon)$ tale che

$$77.31 \quad \varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1} = \sqrt{\varepsilon} \implies N(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/2(\beta+1)}, \quad (77.32)$$

così che $J - J' = O(\sqrt{\varepsilon})$. In conclusione si ha $J(t) - J(0) = O(\sqrt{\varepsilon})$ per tempi t tali che

$$77.32 \quad |t| \leq C_2 (\varepsilon N(\varepsilon)^{\beta+1})^{-N(\varepsilon)} = C_2 e^{B\varepsilon^{-1/2(\beta+2)}}. \quad (77.33)$$

Da qui segue l'asserto, con $a = 1/2$ e $b = 1/2(\beta + 2)$, per opportune costanti A e B . ■

p.77.7 **77.7. Osservazione.** Il teorema 77.3 costituisce una versione del teorema di Nechorošev nel caso di perturbazioni di sistemi isocroni. Il risultato in realtà vale in casi molto più generali, come vedremo nel prossimo capitolo.

p.77.8 **77.8. Osservazione.** Nel caso di perturbazioni di oscillatori armonici, la teoria perturbativa si può spingere a ogni ordine, e si può quindi definire, formalmente,

$$77.33 \quad W(\varphi, J') = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k W_k(\varphi, J'), \quad H'(J') = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k H'_k(J'). \quad (77.34)$$

Le serie (77.34) prendono il nome di *serie di Birkhoff*.

Quindi le serie di Birkhoff sono ben definite a tutti gli ordini della teoria perturbativa. Tuttavia in generale le serie di Birkhoff divergono (esempio degli esercizi 5÷8).

p.77.9 **77.9.** Consideriamo ora il caso di sistemi anisocroni e richiediamo che la condizione (76.19) sia soddisfatta.

Sotto l'ipotesi che l'equazione omologica ammetta soluzione a ogni ordine, allora si può ancora scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi all'ordine k in forma analoga alla (77.3), con la differenza che ora $\omega(J)$ non è costante, quindi N_k riceve contributi anche dal termine $H_0(J)$ della hamiltoniana. Si ha quindi

$$77.34 \quad \left\langle \omega(J'), \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} \right\rangle + N_k(\varphi, J') = H'_k(J'), \quad (77.35)$$

dove

$$77.35 \quad N_k(\varphi, J') = \sum_{2 \leq |a| \leq k} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} H_0(\varphi, J') + \sum_{\sum' k_{ij}=k} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i}(\varphi, J'),$$

$$+ \sum_{1 \leq |a| \leq k-1} \frac{1}{a!} \frac{\partial^{|a|}}{\partial J^a} V(\varphi, J') + \sum_{\sum' k_{ij}=k-1} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{a_i} \frac{\partial W_{k_{ij}}}{\partial \varphi_i}(\varphi, J'), \quad (77.36)$$

con lo stesso significato dei simboli della (77.4). Si noti che anche nei termini della prima riga della (77.36) c'è dipendenza solo da $W_{k'}$ con $k' < k$ a causa del vincolo $|a| \geq 2$.

La principale difficoltà ora è che, come già anticipato al paragrafo 76.20, per risolvere l'equazione omologica si deve controllare $\langle \omega(J'), \nu \rangle$ per $\nu \in \mathbb{Z}^N \neq \{0\}$ e J' in un insieme aperto.

p.77.10 **77.10.** Il seguente risultato è noto come *secondo teorema di trivialità di Poincaré o teorema di non esistenza di Poincaré*.

p.77.11 **77.11.** TEOREMA. *In generale il sistema dinamico descritto dall'Hamiltoniana (76.1) non ammette altre costanti del moto che dipendano analiticamente da ε oltre l'energia.*

p.77.12 **77.12.** Dimostrazione. Supponiamo che esista una costante del moto $F(\varphi, J, \varepsilon)$ analitica in ε : quindi $F(\varphi, J, \varepsilon) = F_0(\varphi, J) + \varepsilon F_1(\varphi, J) + \varepsilon^2 F_2(\varphi, J) + \dots$

La condizione $\{F, J\} = 0$ implica, all'ordine zero in ε ,

$$0 = \{F_0, H_0\} = \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial \varphi}, \omega(J) \right\rangle,$$

quindi $\langle \omega(J), \nu \rangle F_{0,\nu}(J) = 0$ per ogni $\nu \neq 0$. Poiché $\det \partial \omega / \partial J \neq 0$ allora $\langle \omega(J), \nu \rangle \neq 0$ su un insieme denso e quindi $F_{0,\nu}(J) = 0$ per ogni $\nu \neq 0$. Ne segue che $F_0(\varphi, J) = F_0(J)$ è indipendente da φ .

Al primo ordine la condizione $\{F, J\} = 0$ dà

$$0 = \left\langle \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}, \omega(J) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial J}, \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right\rangle,$$

che, espressa nello spazio di Fourier, diventa

$$0 = \langle \nu, \omega(J) \rangle F_{1,\nu}(J) - \langle \nu, \frac{\partial F_0}{\partial J}(J) \rangle V_\nu(J).$$

Quindi sono possibili due casi: $V_\nu(J) = \langle \omega(J), \nu \rangle \tilde{V}_\nu(J)$ per qualche $\tilde{V}_\nu(J)$, che però corrisponde a una condizione non generica, oppure $\langle \omega(J), \nu \rangle = 0$ deve implicare $\langle \nu, \partial F_0(J) / \partial J \rangle = 0$. Di conseguenza i vettori $\omega(J)$ e $\langle \nu, \partial F_0(J) / \partial J \rangle$ devono essere paralleli, ovvero

$$\frac{\partial F_0}{\partial J}(J) = \lambda(J) \omega(J),$$

per qualche funzione $\lambda(J)$, così che $\lambda(J) = \Lambda'(H_0(J))$ e $F_0(J) = \Lambda(H_0(J))$ per qualche funzione Λ . Si ottiene allora

$$\langle \omega, \nu \rangle (\lambda(J) V_\nu(J) - F_{1,\nu}(J)) = 0,$$

che implica $F_1(\varphi, J) = \lambda(J)V(\varphi, J) + C_1(J)$, per qualche funzione C_1 . Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} F(\varphi, J) &= \Lambda(H_0(J)) + \varepsilon \Lambda'(H_0(J)) \varepsilon V(\varphi, J) + \varepsilon C_1 + O(\varepsilon^2) \\ &= \Lambda(H_0(J) + \varepsilon V(\varphi, J)) + \varepsilon C_1 + O(\varepsilon^2) = \Lambda(H(\varphi, J)) + \varepsilon C_1 + O(\varepsilon^2) \\ &= \Lambda(H(\varphi, J)) + \varepsilon [F'_0(\varphi, J) + \varepsilon F'_1(\varphi, J) + O(\varepsilon^2)], \end{aligned}$$

dove $F' = F'_0 + \varepsilon F'_1 + \dots$ è una costante del moto. Ripetendo l'argomento si trova $F'(\varphi, J) = \Lambda_1(H(\varphi, J)) + \varepsilon F''(\varphi, J)$, dove F'' è ancora una costante del moto. Iterando si ottiene $F(\varphi, J) = \Lambda(H(\varphi, J)) + \varepsilon \Lambda_1(H(\varphi, J)) + \varepsilon^2 \Lambda_2(H(\varphi, J)) + \dots$, e quindi, per analiticità, $F(\varphi, J) = \Lambda_\varepsilon(\varphi, J)$ per un'opportuna funzione Λ_ε . ■

p.77.13 **77.13.** Solo recentemente la convergenza delle serie perturbative è stata dimostrata (sotto le assunzioni di non degenerazione e di anisocronia), anche se la teoria perturbativa è stata a lungo utilizzata in astronomia (trovando un buon accordo con i dati sperimentali). Le serie perturbative prendono il nome di *serie di Lindstedt*.

Un metodo alternativo per studiare la convergenza delle serie perturbative è quello introdotto nei paragrafi precedenti, che, quindi, consiste nel definire la trasformazione canonica che porta in variabili in cui la hamiltoniana dipenda solo dalla variabili d'azione come composizione di infinite trasformazioni canoniche. Questo porta al teorema KAM. Grosso modo tale teorema afferma che, sotto le ipotesi fatte su $H_0(J)$, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ la maggior parte dei tori invarianti sopravvive.

Un enunciato formale è il seguente (il teorema sarà dimostrato e discusso nel prossimo capitolo).

p.77.14 **77.14.** TEOREMA *Si consideri il sistema descritto dalla hamiltoniana (76.1), con H_0 e V funzioni analitiche in un dominio*

$$77.36 \quad D(\xi, \rho, J_0) = \left\{ (\varphi, J) \in \mathbb{C}^{2N} : |J_k - J_{0,k}| \leq \rho, \operatorname{Re}(\varphi_k) \in \mathbb{T}, |\operatorname{Im}(\varphi_k)| \leq \xi \right\}, \quad (77.37)$$

e si assuma che

$$77.37 \quad |\langle \omega(J_0), \nu \rangle| \geq \frac{\gamma}{|\nu|^\tau} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}, \quad \sup_{D(\xi, \rho, J_0)} \left| \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial^2 J} \right)^{-1} \right| \leq \eta, \quad (77.38)$$

per opportune costanti positive γ, τ, η . Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ esistono due funzioni α e β , analitiche in \mathbb{T}^N e a valori in \mathbb{R}^N e \mathbb{T}^N , rispettivamente, tali che il toro

$$77.38 \quad J = \alpha(\psi), \quad \varphi = \psi + \beta(\psi), \quad \psi \in \mathbb{T}^N, \quad (77.39)$$

descritto per $\psi \rightarrow \psi + t\omega(J_0)$, è invariante per il sistema.

p.77.15 **77.15.** Osservazione. Inoltre i tori sono analitici in ε . Ovviamente questo implica la convergenza delle serie perturbative per i tori. Altrettanto ovviamente, la serie

perturbativa per la funzione generatrice non converge, perché altrimenti questo implicherebbe l'integrabilità del sistema perturbato.

p.77.16 **77.16. Osservazione.** Si può inoltre dimostrare che i tori invarianti che sopravvivono alla perturbazione riempiono una parte dello spazio delle fasi che ha misura relativa grande, i.e. che tende a 1 quando ε tende a 0. Per questo i sistemi che si ottengono perturbando sistemi integrabili si dicono sistemi quasi-integrabili.

sec.78

78. Un esempio semplice di teoria perturbativa

p.78.1 **78.1. Introduzione.** Consideriamo per $N = 1$ il sistema descritto dalla hamiltoniana

$$78.1 \quad H(q, p) = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2) + \frac{1}{4} \varepsilon k q^4, \quad (78.1)$$

dove $k > 0$ ed ε è il parametro perturbativo.

Con la trasformazione (75.3) la hamiltoniana diventa

$$78.2 \quad H(\varphi, J) = \omega J + \varepsilon \alpha J^2 \sin^4 \varphi, \quad \alpha = \frac{k}{m^2 \omega^2}. \quad (78.2)$$

Si ha quindi, al primo ordine,

$$78.3 \quad H'_1(J) = \alpha J^2 \langle \sin^4 \varphi \rangle = \frac{3}{8} \alpha J^2, \quad (78.3)$$

dove si è usato che (cfr. l'esercizio 16)

$$78.4 \quad \langle \sin^4 \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^4 \varphi = \frac{3}{8}. \quad (78.4)$$

Inoltre (cfr. l'esercizio 16)

$$78.5 \quad \begin{aligned} W_1(\varphi, J') &= -\frac{1}{\omega} \int_0^\varphi d\psi \alpha (J')^2 (\sin^4 \psi - \langle \sin^4 \psi \rangle) \\ &= \frac{\alpha (J')^2}{\omega} \left(\frac{3}{8} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right). \end{aligned} \quad (78.5)$$

In termini delle nuove variabili le equazioni di Hamilton sono

$$78.6 \quad \dot{\varphi}' = \frac{\partial H'(J')}{\partial J'} + O(\varepsilon^2), \quad \dot{J}' = -O(\varepsilon^2), \quad (78.6)$$

con $H'(J') = H_0(J') + \varepsilon H'_1(J') + O(\varepsilon^2)$, che danno

$$78.7 \quad \varphi'(t) = \varphi'(0) + (\omega + \varepsilon \omega_1(J'(0))) t + O(\varepsilon^2), \quad J'(t) = J'(0) + O(\varepsilon^2), \quad (78.7)$$

dove

$$78.8 \quad \omega_1(J') = \frac{\partial H'_1}{\partial J}(J') = \frac{3}{4}\alpha J'. \quad (78.8)$$

Dobbiamo esprimere $(\varphi'(0), J'(0))$ in termini di $(\varphi(0), J(0))$ e, infine, $(\varphi(t), J(t))$ in termini di $(\varphi'(t), J'(t))$.

Dobbiamo quindi calcolare la trasformazione canonica che ha $W(\varphi, J') = \varphi J' + \varepsilon W_1(\varphi, J')$ come funzione generatrice (di seconda specie).

Si ha, per definizione,

$$78.9 \quad J = J' + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}, \quad \varphi' = \varphi + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial J'}, \quad (78.9)$$

da cui si ricava

$$78.10 \quad \begin{aligned} J &= J' + \varepsilon \frac{\alpha}{\omega} (J')^2 \left(\frac{3}{8} \cos^2 \varphi - \frac{3}{8} \sin^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^4 \varphi \right) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi' &= \varphi + 2\varepsilon \frac{\alpha}{\omega} J' \left(\frac{3}{8} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (78.10)$$

da cui ricaviamo immediatamente la trasformazione di coordinate

$$78.11 \quad \begin{aligned} J' &= J - \varepsilon \frac{\alpha}{\omega} J^2 \left(\frac{3}{8} \cos^2 \varphi - \frac{3}{8} \sin^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^4 \varphi \right) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi' &= \varphi + 2\varepsilon \frac{\alpha}{\omega} J \left(\frac{3}{8} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (78.11)$$

e la sua inversa

$$78.12 \quad \begin{aligned} J &= J' + \varepsilon \frac{\alpha}{\omega} (J')^2 \left(\frac{3}{8} \cos^2 \varphi - \frac{3}{8} \sin^2 \varphi + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^4 \varphi \right) + O(\varepsilon^2), \\ \varphi &= \varphi' - 2\varepsilon \frac{\alpha}{\omega} J' \left(\frac{3}{8} \sin \varphi' \cos \varphi' + \frac{1}{4} \sin^3 \varphi' \cos \varphi' \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (78.12)$$

dove, al solito, i termini di ordine superiore al primo sono trascurati.

p.78.2 **78.2.** Inoltre si tenga conto che, scrivendo in (78.12) $\varphi = \varphi' + \varepsilon \varphi_1 + O(\varepsilon^2)$ e $J = J' + \varepsilon J_1 + O(\varepsilon^2)$ e ponendo $\omega_1 = \omega_1(J'(0))$, si ha

$$78.13 \quad \begin{aligned} \sin \varphi &= \sin(\varphi'(0) + \omega t + \varepsilon \omega_1 t + \varepsilon \varphi_1) \\ &= \sin(\varphi'(0) + \omega t) \cos(\varepsilon \omega_1 t + \varepsilon \varphi_1) + \cos(\varphi'(0) + \omega t) \sin(\varepsilon \omega_1 t + \varepsilon \varphi_1) + O(\varepsilon^2) \\ &= \sin(\varphi'(0) + \omega t) + \varepsilon (\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\varphi'(0) + \omega t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (78.13)$$

dove (cfr. la (78.11))

$$78.14 \quad \varphi'(0) = \varphi(0) + 2\varepsilon \frac{\alpha}{\omega} J(0) \left(\frac{3}{8} \sin \varphi(0) \cos \varphi(0) + \frac{1}{4} \sin^3 \varphi(0) \cos \varphi(0) \right) + O(\varepsilon^2). \quad (78.14)$$

e, allo stesso modo,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{J} &= \sqrt{J' + \varepsilon J_1 + O(\varepsilon^2)} = \sqrt{J'(0) + \varepsilon J_1 + O(\varepsilon^2)} \\
 78.15 \quad &= \sqrt{J'(0)} \left(1 + \varepsilon \frac{J_1}{J'(0)} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (78.15)
 \end{aligned}$$

dove (cfr. di nuovo la (78.11))

$$\begin{aligned}
 78.16 \quad J'(0) &= J(0) - \varepsilon \frac{\alpha}{\omega} J^2(0) \left(\frac{3}{8} \cos^2 \varphi(0) - \frac{3}{8} \sin^2 \varphi(0) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{4} \sin^2 \varphi(0) \cos^2 \varphi(0) - \frac{1}{4} \sin^4 \varphi(0) \right) + O(\varepsilon^2). \quad (78.16)
 \end{aligned}$$

p.78.3 **78.3.** Alla fine, utilizzando le (78.7), (78.11) e (78.12), ed esprimendo (q, p) in funzione di (φ, J) attraverso la (78.3), troviamo $(q(t), p(t))$.

p.78.4 **78.4.**

Nota bibliografica

Esercizi

Esercizio 1. Dimostrare che in variabili azione-angolo la hamiltoniana dell'oscillatore armonico ha la forma (75.2). [*Suggerimento.* Si tenga conto dell'esercizio 16 del Capitolo 18 e si verifichi che $a_1 = \sqrt{m/k}$, con $k = m\omega^2$.]

Esercizio 2. Dimostrare la stima (76.3).

Esercizio 3. Scrivere la perturbazione nella hamiltoniana (76.5) in variabili azione-angolo.

Esercizio 4. Dimostrare la stima (76.21) se si sceglie $N = N_0(\varepsilon)$ in accordo con la (76.22).

Esercizio 5. Si consideri la hamiltoniana

$$H(\varphi, J) = J_1 + \alpha J_2 + \varepsilon (J_2 + F(\varphi_1, \varphi_2)),$$

dove $(1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ è un vettore diofanteo e

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^2} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} F_\nu$$

è analitica. Calcolare esplicitamente la serie di Birkhoff. [*Suggerimento.* Si trova $H'_1(J') = J'_2$ e $H'_k(J') = 0$ per $k \geq 2$, mentre

$$W_k(\varphi, J') = - \sum_{\nu \neq 0} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} \frac{F_\nu}{i \langle \omega, \nu \rangle} \left(- \frac{\nu_2}{\langle \omega, \nu \rangle} \right)^{k-1}$$

per $k \geq 1$.]

Esercizio 6. Si dimostri che i coefficienti di ordine k della serie di Birkhoff dell'esercizio 5 si stimano proporzionalmente a $k!^{\tau+1}$. [*Suggerimento.* Si trova che $|W_{k,\nu}(J')|$ si stima proporzionalmente a $|\nu|^{\tau+(k-1)(\tau+1)}$ e si usa che $(k(\tau+1))! \leq C^k k!^{\tau+1}$ per un'opportuna costante C .]

Esercizio 7. Dimostrare che i moti del sistema descritto dalla hamiltoniana $H(\varphi, J)$ dell'esercizio 5 divergono linearmente nel tempo e dedurne che le serie di Birkhoff divergono. [*Suggerimento.* Integrare esplicitamente le equazioni di Hamilton.]

Esercizio 8. Si consideri la hamiltoniana dell'esercizio 5. Dimostrare che la soluzione formale dell'equazione di Hamilton-Jacobi è data da

$$H'(J') = J'_1 + \alpha J'_2 + \varepsilon J'_2 + \varepsilon F_0,$$

$$W(\varphi, J') = \varphi_1 J'_1 + \varphi_2 J'_2 + i\varepsilon \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^2 \\ \nu \neq 0}} e^{i\langle \nu, \varphi \rangle} \frac{F_\nu}{\nu_1 + \nu_2(\alpha + \varepsilon)}.$$

Dedurne che le serie di Birkhoff divergono.

Esercizio 9. Dimostrare che la condizione (77.13) permette di risolvere le (77.15) con il teorema della funzione implicita. [*Suggerimento.* Definendo $G(J, J, \varphi) = J' - J + \varepsilon(\partial W_1/\partial \varphi)(\varphi, J')$, si considera l'equazione $G(J, J', \varphi) = 0$. Si ha allora $\partial G/\partial J' = \mathbb{1} + \varepsilon(\partial^2 W_1/\partial \varphi \partial J)$ e quindi $|\det(\partial G/\partial J')| \geq 1/2$ purché $\varepsilon B_3 \gamma^{-1} \|V\|_0 \delta^{-n-\tau-1} < 1/2$.]

Esercizio 10. Dimostrare la (77.19). [*Suggerimento.* Si dimostra per induzione che $k_1! \dots k_s! \leq (k - (s - 1))!$ se $k = k_1 + \dots + k_s$ e $k_1, \dots, k_s \geq 1$. Per $s = 1$ la stima è banale, per $s > 1$ si ha

$$k_1! \dots k_s! \leq k_1! \dots k_{s-1}! k_s! \leq (\tilde{k} - (s - 2))! k_s! \leq (\tilde{k} + k_s - (s - 2) - 1)!$$

dove $\tilde{k} = k_1 + \dots + k_{s-1} = k - k_s$. La somma su $k_1! \dots k_s!$ con i vincoli sopra si può quindi stimare con il numero di modi di scegliere $s - 1$ numeri tra k per il massimo di $k_1! \dots k_s!$, quindi

$$\sum_{\substack{k_1, \dots, k_s \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_s = k}} k_1! \dots k_s! \leq \binom{k}{s-1} (k - (s - 1))! \leq k!$$

Esercizio 11. Dimostrare la (77.20). [*Suggerimento.* Poiché $a_1, \dots, a_N \geq 0$ e $a_1 + \dots + a_N = p$, esiste m tale che $1 \leq m \leq N$, $a_{i_1}, \dots, a_{i_m} \geq 1$, $a_{i_1} + \dots + a_{i_m} = p$, mentre i restanti a_i sono nulli. La somma su a_{i_1}, \dots, a_{i_m} che verificano tali condizioni si può stimare con la somma dei possibili modi di fissare m punti tra p dati. Infine si può stimare

$$\binom{p}{m} \leq 2^p, \quad \sum_{m=1}^N \binom{N}{m} = 2^N,$$

e questo completa la dimostrazione.]

Esercizio 12. Si ricordi il teorema di Cauchy: data una funzione $f(z)$, analitica in un aperto $D \subset \mathbb{C}^2$ e continua sulla frontiera ∂D , si ha

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

dove l'integrale è esteso alla curva ∂D . Dedurre che, se $D' \subset D$ e $z \in D'$, si ha

$$\frac{1}{n!} \left| \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) \right| \leq \frac{M}{\delta^n},$$

dove M è il massimo del modulo di $f(z)$ in D e δ è la distanza tra D' e ∂D .

Esercizio 13. Si utilizzi il teorema di Cauchy per dimostrare le (77.10) e (77.19).

Esercizio 14. Dimostrare la (77.28).

Esercizio 15. Dimostrare che $k! \leq k^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. [*Suggerimento.* Si usi la formula di Stirling o, più semplicemente, si noti che $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot k \leq k \cdot k \cdot k \dots \cdot k = k^k$.]

Esercizio 16. Dimostrare le (78.4) e (78.5). [*Soluzione.* Si ha

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi = \int d\varphi \sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) = \int d\varphi \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \int d\varphi \sin^3 \varphi \cos \varphi - \frac{1}{3} \int d\varphi \sin^4 \varphi,$$

e quindi

$$\int d\varphi \sin^4 \varphi = \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right).$$

In particolare si ha $\langle \sin^4 \varphi \rangle = 3/8$.]

Capitolo 20. Teorema KAM

sec.79

79. Aaa

p.79.1 **79.1. Introduzione.**

p.79.2 **79.2.**

p.79.3 **79.3.**

p.79.4 **79.4.**

p.79.5 **79.5.**

p.79.6 **79.6.**

sec.80

80. Bbb

p.80.1 **80.1. Introduzione.**

p.80.2 **80.2.**

p.80.3 **80.3. TEOREMA.**

p.80.4 **80.4. Dimostrazione.**

p.80.5 **80.5.**

p.80.6 **80.6. Osservazione.**

p.80.7 **80.7.**

p.80.8 **80.8.**

p.80.9 **80.9.**

p.80.10 **80.10.**

sec.81

81. Ccc

p.81.1 **81.1. Introduzione.**

p.81.2 **81.2.**

p.81.3 **81.3. TEOREMA.**

p.81.4 **81.4. Dimostrazione.**

p.81.5 **81.5.**

p.81.6 **81.6. Osservazione.**

sec.82

82. Ddd

p.82.1 **82.1. Introduzione.**

p.82.2 **82.2.**

p.82.3 **82.3. TEOREMA.**

p.82.4 **82.4. Dimostrazione.**

p.82.5 **82.5.**

p.82.6 **82.6. Osservazione.**

Nota bibliografica

Esercizi

248 CAPITOLO 20. TEOREMA KAM

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.

Esercizio 5.

Esercizio 6.

Esercizio 7.

Esercizio 8.

Bibliografia ragionata

• I testi di riferimento di base, che si sono tenuti principalmente presenti nel testo, sono i seguenti:

- [1] G. Dell'Antonio: *Elementi di Meccanica*, Liguori, Napoli, 1996. [Dell'Antonio].
- [2] V.I. Arnol'd: *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma, 1979. [Arnol'd2].
- [3] A. Fasano, S. Marmi: *Meccanica Analitica*, Boringhieri, Torino, 1994. [Fasano-Marmi].

• Per alcuni argomenti specifici si sono tenuti presenti anche:

- [4] M. W. Hirsch, S. Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974. [Hirsch-Smale].
- [5] G. Gallavotti: *Meccanica Elementare*, Boringhieri, Torino, 1980. [Gallavotti].
- [6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz: *Meccanica*, Editori Riuniti, Roma, 1976. [Landau-Lifshitz].
- [7] T. Levi-Civita, U. Amaldi: *Lezioni di Meccanica Elementare*, Zanichelli, Bologna, 1947. [Levi-Civita-Amaldi].
- [8] H. Goldstein: *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1980. [Goldstein].
- [9] V.I. Arnol'd: *Équations Différentielles Ordinaires*, MIR, Mosca, 1974. [Arnol'd1].
- [10] L. Benfatto, R. Raimondi, E. Scoppola: *Meccanica Analitica*, Dispense del Corso di Meccanica Analitica e Statistica, disponibili in rete.
- [11] A. Berretti: *Varietà simplettiche*, Dispense del Corso di Meccanica Razionale, disponibili in rete.
- [12] G. Benettin, F. Fassò: *Il teorema di Liouville-Arnold*, Dispense del Corso di

Meccanica Razionale, disponibili in rete.

• Per richiami di Analisi, di Geometria e di Algebra si può consultare qualsiasi testo sull'argomento. Noi, a titolo puramente indicativo, abbiamo fatto riferimento a:

[13] E. Giusti: *Analisi Matematica 1*, Boringhieri, Torino, 1985. [Giusti1].

[14] E. Giusti: *Analisi Matematica 2*, Boringhieri, Torino, 1983. [Giusti2].

[15] S. Lang: *Algebra Lineare*, Boringhieri, Torino, 1970. [Lang].

[16] A.G. Kuroš: *Corso di Algebra Superiore*, Editori Riuniti, Roma, 1977. [Kuroš].

[17] E. Martinelli: *Il metodo delle coordinate*, Veschi, Roma, 1984. [Martinelli].

[18] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov: *Modern geometry – Methods and applications. Part III. Introduction to homology theory*, Graduate Texts in Mathematics, 124, Springer-Verlag, New York, 1990. [Dubrovin-Fomenko-Novikov]

Questo è tutto.

Indice analitico

254 INDICE ANALITICO

Indice dei nomi

A	
Arnol'd	26, 201, 205, 245
B	
Birkhoff	238, 245
C	
Cartan	172, 174
Cauchy	6, 243
Courant	121
D	
D'Alembert	14
Dirichlet	101
E	
Eulero	4
F	
Fisher	121
Frobenius	87
G	
Gallavotti	26
Gauss	168
Green	168
H	
Hamilton	6, 145, 154, 191, 192
J	
Jacobi	84, 191
K	
Kolmogorov	245
Kronecker	103
L	
Lagrange	4, 127
Legendre	143
Lie	84, 175
Lindstedt	239, 245
Liouville	147, 201, 205
M	
Mathieu	37
Maxwell	149
Moser	245
N	
Nechorošev	238, 245
Newton	5
Noether	80, 93
P	
Poincaré	148, 171, 172, 174, 232, 239, 245
Poinsot	138

Poisson	163, 166
---------	----------

R	
Rayleigh	121
Routh	44, 129, 151
S	
Stokes	169, 172

Indice delle materie

a	
angoli di Eulero	127
anisocronia	231
applicazione frequenza	229
asse della trottola	127
atlante	10
azione	152, 183
b	
battimenti	112
c	
campi vettoriali commutanti	85
campo vettoriale a divergenza nulla	146
campo vettoriale hamiltoniano	146
carta	10
cella	206
cella elementare	206
cicloide	132, 141
cicloide accorciata	132, 141
cicloide allungata	132, 141
cilindro	205
circuitazione	168
cofibrato tangente	144
commutatore di campi vettoriali	85
condizione di Lie	175
condizione di isocronia	245
condizione di non degenerazione	231, 245
condizione di non risonanza	231
condizione diofantea	231, 245
coordinate canoniche	145
coordinate generalizzate	13
coordinate lagrangiane	13
costante del moto	164
curva integrale	169
d	
deformazione	1
degenerazione	231
derivata esterna	170, 171
derivazione associata a un campo vettoriale	77

descrizione secondo Poincot	138		
determinante di una matrice simplettica	161		
diagonalizzazione di una coppia di forme quadratiche	103		
differenziale a tempo bloccato	174		
direzione di rotore	170		
divergenza delle serie di Birkhoff	238		
divergenza	168, 169		
e			
energia potenziale centrifuga	69		
energia potenziale efficace della trottola	129		
equazione caratteristica	106		
equazione di Hamilton-Jacobi	191		
equazione di Mathieu	37		
equazione differenziale alle derivate parziali	191		
equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni	229		
equazione omologica	229		
equazioni canoniche	146		
equazioni di Eulero-Lagrange	4		
equazioni di Hamilton	145, 153		
espansione di Fourier generica	232		
esperimento di Maxwell	149		
esponenti diofantei	231		
f			
fibrato tangente	10		
forma differenziale	157, 160, 171		
forma differenziale chiusa	157, 171		
forma differenziale di Poincaré-Cartan	172, 177		
forma differenziale esatta	157, 171		
forma differenziale non singolare	172		
forma esterna	170		
forma quadratica definita positiva	101		
forma simplettica	183		
formula di Stokes	169		
forza centrale	46		
forza vincolare	21		
frequenza caratteristica	105		
frequenza di un moto multiperiodico	202		
frequenza normale	105		
frequenza principale	105		
frequenza propria	102, 105		
funzionale d'azione	2, 152		
funzione caratteristica di Hamilton	193		
funzione generatrice	178		
funzione generatrice di prima specie	179		
funzione generatrice di seconda specie	180		
funzione principale di Hamilton	192		
g			
genericità	232		
gruppi di simmetrie a più parametri	83		
gruppo a un parametro di diffeomorfismi	75		
gruppo a un parametro di trasformazioni	75		
gruppo di simmetrie	80		
h			
hamiltoniana degenerare	231		
hamiltoniana isocrona	231		
hamiltoniana non degenerare	231		
hamiltoniana	144		
i			
identità	181		
identità di Jacobi	84, 164		
insieme dei periodi	207		
insieme regolare	168		
integrabilità	224		
integrale completo	192		
integrale di una forma differenziale	157		
integrale generale	192		
integrale primo	164		
invariante integrale di Poincaré-Cartan	174		
invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan	174		
invarianza della lagrangiana	80		
involuzione	144, 164		
isocronia	227		
l			
lagrangiana	1		
lagrangiana invariante	80		
lagrangiana ridotta	45		
lagrangiana vincolata	13		
lemma di Poincaré	171		
lemma di Stokes	169, 172		
linea di rotore	169, 172		
m			
matrice antisimmetrica	169, 185		
matrice antisimmetrica non singolare	170		
matrice cinetica	22		
matrice dei periodi	208		
matrice jacobiana	160		
matrice simmetrica	103		
matrice simplettica	158		
matrice simplettica standard	145		
metodo di Routh	43, 129, 151		
modello di vincolo approssimato	21		
modo normale	105		
momento associato a un campo vettoriale	78		
momento coniugato	79, 145		
momento conservato	78		
moto merostatico	132		
moto multiperiodico	202		
moto quasiperiodico	202		
n			
normale	167		
normale esterna	168		
nutazione	132		
o			

256 INDICE ANALITICO

oscillatore armonico	199, 227, 238	sistema unidimensionale	195
oscillazione propria	105	sollevamento di un campo vettoriale	91
		sollevamento di una trasformazione di coordinate	77
p		spazio affine	35
parametro perturbativo	181, 228	spazio delle deformazioni	1, 152
parentesi di Poisson	163	spazio delle fasi	144
parentesi di Poisson fondamentali	166	spazio delle fasi esteso	169
pendoli accoppiati	110	spazio delle traiettorie	1, 152
pendolo doppio	36	spazio duale	157
pendolo sferico	38, 135	stabilità	41
piccole oscillazioni	102, 105	superficie regolare	201
piccole oscillazioni per sistemi vincolati	117	superficie trasversa	208
precessione	133		
precessione regolare	132	t	
primo principio variazionale di Hamilton	6	teorema KAM	239, 245
primo teorema di trivialità di Poincaré	232	teorema del ritorno di Poincaré	148
principio del minimax	119	teorema del rotore	167
principio di d'Alembert	14	teorema della divergenza	167, 168
principio di minima azione	7	teorema della scatola di flusso	91, 194
problema con condizioni al contorno	6	teorema di Arnol'd-Gallavotti	26
problema dei due corpi	46, 223, 225	teorema di Arnol'd-Liouville	201, 205
problema di Cauchy	6	teorema di Birkhoff	245
procedimento di prima specie	178	teorema di Cauchy	243
procedimento di quarta specie	180	teorema di Frobenius	87
procedimento di seconda specie	179	teorema di Gauss-Green	168
procedimento di terza specie	180	teorema di Kolmogorov	245
prodotto di Lie	84, 164	teorema di Liouville	147
prodotto esterno	171	teorema di Nechorošev	238, 245
punto d'equilibrio stabile	41	teorema di Noether	80, 93
		teorema di Poincaré	232
r		teorema di Poisson	166
rango di una matrice	170	teorema di Rayleigh-Courant-Fisher	121
rigidità	117	teorema di Routh	44, 151
rotazione propria	133	teorema di Stokes	169, 172
rotore	168	teorema di non esistenza di Poincaré	239
		teoremi di trivialità di Poincaré	232, 239
s		teoria delle perturbazioni	228
secondo principio variazionale di Hamilton	154	teoria perturbativa a tutti gli ordini	233
secondo teorema di trivialità di Poincaré	239	teoria perturbativa al primo ordine	228
separabilità	198	teoria perturbativa	228
separazione di variabili	198	toro invariante	239, 245
serie di Birkhoff	238	toro non risonante	245
serie di Lindstedt	239	toro unidimensionale	201
serie formale	233	trasformata di Legendre	143
serie perturbativa	238	trasformazione canonica	159
simmetria	80	trasformazione che conserva il volume	146
sistema aniscocrono	231	trasformazione che conserva la struttura canonica delle equazioni	159
sistema di coordinate bene adattato	23	trasformazione di coordinate	159
sistema di coordinate ortogonale	23	trasformazione involutiva	144
sistema hamiltoniano	146	trasformazione simplettica	159
sistema integrabile	192, 227	trocoide	140
sistema isocrono	227	trottola	127
sistema lagrangiano	12	trottola addormentata	137
sistema linearizzato	102	trottola di Lagrange	127
sistema meccanico conservativo	40	trottola lanciata velocemente	140
sistema perturbato	181	trottola pesante	127
sistema quasi-integrabile	240		
sistema separabile	195, 198, 202		

trottola simmetrica	127
trottola veloce	137
tubo di rotore	169, 172
v	
variabile ciclica	44
variabili azione-angolo	201
varietà	10
varietà differenziale con bordo	172
varietà differenziale	10
varietà regolare	10
vertice della trottola	132
vettore diofanteo	231
vettore non risonante	231
vincolo approssimato	21
vincolo approssimato perfetto	24
vincolo reale	21