

Capitolo 20. Teorema KAM

sec.79

79. Aaa

p.79.1 **79.1. Introduzione.**

p.79.2 **79.2.**

p.79.3 **79.3.**

p.79.4 **79.4.**

p.79.5 **79.5.**

p.79.6 **79.6.**

sec.80

80. Bbb

p.80.1 **80.1. Introduzione.**

p.80.2 **80.2.**

p.80.3 **80.3. TEOREMA.**

p.80.4 **80.4. Dimostrazione.**

p.80.5 **80.5.**

p.80.6 **80.6. Osservazione.**

p.80.7 **80.7.**

p.80.8 **80.8.**

p.80.9 **80.9.**

p.80.10 **80.10.**

sec.81

81. Ccc

p.81.1 **81.1. Introduzione.**

p.81.2 **81.2.**

p.81.3 **81.3. TEOREMA.**

p.81.4 **81.4. Dimostrazione.**

p.81.5 **81.5.**

p.81.6 **81.6. Osservazione.**

sec.82

82. Ddd

p.82.1 **82.1. Introduzione.**

p.82.2 **82.2.**

p.82.3 **82.3. TEOREMA.**

p.82.4 **82.4. Dimostrazione.**

p.82.5 **82.5.**

p.82.6 **82.6. Osservazione.**

Nota bibliografica

Esercizi

Esercizio 1.

Esercizio 2.

Esercizio 3.

Esercizio 4.

Esercizio 5.

Esercizio 6.

Esercizio 7.

Esercizio 8.

Bibliografia ragionata

• I testi di riferimento di base, che si sono tenuti principalmente presenti nel testo, sono i seguenti:

- [1] G. Dell'Antonio: *Elementi di Meccanica*, Liguori, Napoli, 1996. [Dell'Antonio].
- [2] V.I. Arnol'd: *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma, 1979. [Arnol'd2].
- [3] A. Fasano, S. Marmi: *Meccanica Analitica*, Boringhieri, Torino, 1994. [Fasano-Marmi].

• Per alcuni argomenti specifici si sono tenuti presenti anche:

- [4] M. W. Hirsch, S. Smale: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974. [Hirsch-Smale].
- [5] G. Gallavotti: *Meccanica Elementare*, Boringhieri, Torino, 1980. [Gallavotti].
- [6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz: *Meccanica*, Editori Riuniti, Roma, 1976. [Landau-Lifshitz].
- [7] T. Levi-Civita, U. Amaldi: *Lezioni di Meccanica Elementare*, Zanichelli, Bologna, 1947. [Levi-Civita-Amaldi].
- [8] H. Goldstein: *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1980. [Goldstein].
- [9] V.I. Arnol'd: *Équations Différentielles Ordinaires*, MIR, Mosca, 1974. [Arnol'd1].
- [10] L. Benfatto, R. Raimondi, E. Scoppola: *Meccanica Analitica*, Dispense del Corso di Meccanica Analitica e Statistica, disponibili in rete.
- [11] A. Berretti: *Varietà simplettiche*, Dispense del Corso di Meccanica Razionale, disponibili in rete.
- [12] G. Benettin, F. Fassò: *Il teorema di Liouville-Arnold*, Dispense del Corso di

Meccanica Razionale, disponibili in rete.

• Per richiami di Analisi, di Geometria e di Algebra si può consultare qualsiasi testo sull'argomento. Noi, a titolo puramente indicativo, abbiamo fatto riferimento a:

[13] E. Giusti: *Analisi Matematica 1*, Boringhieri, Torino, 1985. [Giusti1].

[14] E. Giusti: *Analisi Matematica 2*, Boringhieri, Torino, 1983. [Giusti2].

[15] S. Lang: *Algebra Lineare*, Boringhieri, Torino, 1970. [Lang].

[16] A.G. Kuroš: *Corso di Algebra Superiore*, Editori Riuniti, Roma, 1977. [Kuroš].

[17] E. Martinelli: *Il metodo delle coordinate*, Veschi, Roma, 1984. [Martinelli].

[18] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov: *Modern geometry – Methods and applications. Part III. Introduction to homology theory*, Graduate Texts in Mathematics, 124, Springer-Verlag, New York, 1990. [Dubrovin-Fomenko-Novikov]

Questo è tutto.

Indice analitico

Indice dei nomi			
A			Poisson
Arnol'd	26, 201, 205, 245		163, 166
B			R
Birkhoff	238, 245		Rayleigh
C			Routh
Cartan	172, 174		44, 129, 151
Cauchy	6, 243		S
Courant	121		Stokes
D			169, 172
D'Alembert	14		
Dirichlet	101		Indice delle materie
E			a
Eulero	4		angoli di Eulero
F			anisocronia
Fisher	121		applicazione frequenza
Frobenius	87		asse della trottola
G			atlante
Gallavotti	26		azione
Gauss	168		152, 183
Green	168		b
H			battimenti
Hamilton	6, 145, 154, 191, 192		112
J			c
Jacobi	84, 191		campi vettoriali commutanti
K			campo vettoriale a divergenza nulla
Kolmogorov	245		campo vettoriale hamiltoniano
Kronecker	103		carta
L			cella
Lagrange	4, 127		cella elementare
Legendre	143		cicloide
Lie	84, 175		132, 141
Lindstedt	239, 245		cicloide accorciata
Liouville	147, 201, 205		132, 141
M			cicloide allungata
Mathieu	37		cilindro
Maxwell	149		205
Moser	245		circuitazione
N			168
Nechorošev	238, 245		cofibrato tangente
Newton	5		144
Noether	80, 93		commutatore di campi vettoriali
P			85
Poincaré	148, 171, 172, 174, 232, 239, 245		condizione di Lie
Poinsot	138		175
			condizione di isocronia
			245
			condizione di non degenerazione
			231, 245
			condizione di non risonanza
			231
			condizione diofantea
			231, 245
			coordinate canoniche
			145
			coordinate generalizzate
			13
			coordinate lagrangiane
			13
			costante del moto
			164
			curva integrale
			169
			d
			deformazione
			1
			degenerazione
			231
			derivata esterna
			170, 171
			derivazione associata a un campo vettoriale
			77

254 INDICE ANALITICO

descrizione secondo Poincot	138		
determinante di una matrice simplettica	161		
diagonalizzazione di una coppia di forme quadratiche	103		
differenziale a tempo bloccato	174		
direzione di rotore	170		
divergenza delle serie di Birkhoff	238		
divergenza	168, 169		
e			
energia potenziale centrifuga	69		
energia potenziale efficace della trottola	129		
equazione caratteristica	106		
equazione di Hamilton-Jacobi	191		
equazione di Mathieu	37		
equazione differenziale alle derivate parziali	191		
equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni	229		
equazione omologica	229		
equazioni canoniche	146		
equazioni di Eulero-Lagrange	4		
equazioni di Hamilton	145, 153		
espansione di Fourier generica	232		
esperimento di Maxwell	149		
esponenti diofantei	231		
f			
fibrato tangente	10		
forma differenziale	157, 160, 171		
forma differenziale chiusa	157, 171		
forma differenziale di Poincaré-Cartan	172, 177		
forma differenziale esatta	157, 171		
forma differenziale non singolare	172		
forma esterna	170		
forma quadratica definita positiva	101		
forma simplettica	183		
formula di Stokes	169		
forza centrale	46		
forza vincolare	21		
frequenza caratteristica	105		
frequenza di un moto multiperiodico	202		
frequenza normale	105		
frequenza principale	105		
frequenza propria	102, 105		
funzionale d'azione	2, 152		
funzione caratteristica di Hamilton	193		
funzione generatrice	178		
funzione generatrice di prima specie	179		
funzione generatrice di seconda specie	180		
funzione principale di Hamilton	192		
g			
genericità	232		
gruppi di simmetrie a più parametri	83		
gruppo a un parametro di diffeomorfismi	75		
gruppo a un parametro di trasformazioni	75		
gruppo di simmetrie	80		
h			
hamiltoniana degenerare	231		
hamiltoniana isocrona	231		
hamiltoniana non degenerare	231		
hamiltoniana	144		
i			
identità	181		
identità di Jacobi	84, 164		
insieme dei periodi	207		
insieme regolare	168		
integrabilità	224		
integrale completo	192		
integrale di una forma differenziale	157		
integrale generale	192		
integrale primo	164		
invariante integrale di Poincaré-Cartan	174		
invariante integrale relativo di Poincaré-Cartan	174		
invarianza della lagrangiana	80		
involuzione	144, 164		
isocronia	227		
l			
lagrangiana	1		
lagrangiana invariante	80		
lagrangiana ridotta	45		
lagrangiana vincolata	13		
lemma di Poincaré	171		
lemma di Stokes	169, 172		
linea di rotore	169, 172		
m			
matrice antisimmetrica	169, 185		
matrice antisimmetrica non singolare	170		
matrice cinetica	22		
matrice dei periodi	208		
matrice jacobiana	160		
matrice simmetrica	103		
matrice simplettica	158		
matrice simplettica standard	145		
metodo di Routh	43, 129, 151		
modello di vincolo approssimato	21		
modo normale	105		
momento associato a un campo vettoriale	78		
momento coniugato	79, 145		
momento conservato	78		
moto merostatico	132		
moto multiperiodico	202		
moto quasiperiodico	202		
n			
normale	167		
normale esterna	168		
nutazione	132		
o			

oscillatore armonico	199, 227, 238	sistema unidimensionale	195
oscillazione propria	105	sollevamento di un campo vettoriale	91
		sollevamento di una trasformazione di coordinate	77
p		spazio affine	35
parametro perturbativo	181, 228	spazio delle deformazioni	1, 152
parentesi di Poisson	163	spazio delle fasi	144
parentesi di Poisson fondamentali	166	spazio delle fasi esteso	169
pendoli accoppiati	110	spazio delle traiettorie	1, 152
pendolo doppio	36	spazio duale	157
pendolo sferico	38, 135	stabilità	41
piccole oscillazioni	102, 105	superficie regolare	201
piccole oscillazioni per sistemi vincolati	117	superficie trasversa	208
precessione	133		
precessione regolare	132	t	
primo principio variazionale di Hamilton	6	teorema KAM	239, 245
primo teorema di trivialità di Poincaré	232	teorema del ritorno di Poincaré	148
principio del minimax	119	teorema del rotore	167
principio di d'Alembert	14	teorema della divergenza	167, 168
principio di minima azione	7	teorema della scatola di flusso	91, 194
problema con condizioni al contorno	6	teorema di Arnol'd-Gallavotti	26
problema dei due corpi	46, 223, 225	teorema di Arnol'd-Liouville	201, 205
problema di Cauchy	6	teorema di Birkhoff	245
procedimento di prima specie	178	teorema di Cauchy	243
procedimento di quarta specie	180	teorema di Frobenius	87
procedimento di seconda specie	179	teorema di Gauss-Green	168
procedimento di terza specie	180	teorema di Kolmogorov	245
prodotto di Lie	84, 164	teorema di Liouville	147
prodotto esterno	171	teorema di Nechorošev	238, 245
punto d'equilibrio stabile	41	teorema di Noether	80, 93
		teorema di Poincaré	232
r		teorema di Poisson	166
rango di una matrice	170	teorema di Rayleigh-Courant-Fisher	121
rigidità	117	teorema di Routh	44, 151
rotazione propria	133	teorema di Stokes	169, 172
rotore	168	teorema di non esistenza di Poincaré	239
		teoremi di trivialità di Poincaré	232, 239
s		teoria delle perturbazioni	228
secondo principio variazionale di Hamilton	154	teoria perturbativa a tutti gli ordini	233
secondo teorema di trivialità di Poincaré	239	teoria perturbativa al primo ordine	228
separabilità	198	teoria perturbativa	228
separazione di variabili	198	toro invariante	239, 245
serie di Birkhoff	238	toro non risonante	245
serie di Lindstedt	239	toro unidimensionale	201
serie formale	233	trasformata di Legendre	143
serie perturbativa	238	trasformazione canonica	159
simmetria	80	trasformazione che conserva il volume	146
sistema aniscocrono	231	trasformazione che conserva la struttura canonica delle equazioni	159
sistema di coordinate bene adattato	23	trasformazione di coordinate	159
sistema di coordinate ortogonale	23	trasformazione involutiva	144
sistema hamiltoniano	146	trasformazione simplettica	159
sistema integrabile	192, 227	trocoide	140
sistema isocrono	227	trottola	127
sistema lagrangiano	12	trottola addormentata	137
sistema linearizzato	102	trottola di Lagrange	127
sistema meccanico conservativo	40	trottola lanciata velocemente	140
sistema perturbato	181	trottola pesante	127
sistema quasi-integrabile	240		
sistema separabile	195, 198, 202		

256 INDICE ANALITICO

trottola simmetrica	127
trottola veloce	137
tubo di rotore	169, 172
v	
variabile ciclica	44
variabili azione-angolo	201
varietà	10
varietà differenziale con bordo	172
varietà differenziale	10
varietà regolare	10
vertice della trottola	132
vettore diofanteo	231
vettore non risonante	231
vincolo approssimato	21
vincolo approssimato perfetto	24
vincolo reale	21