Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2003/2004

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prima prova d'esonero (05-04-2004)

CORREZIONE

Esercizio 2.

2.1. Costante del moto. Si ha

$$H(x,y) = \left(y^2-1\right)\left(x^2y^2-1\right) = x^2y^4 - y^2 - x^2y^2 + 1,$$

quindi, derivando, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= 2xy^4 - 2xy^2 = 2xy^2\left(y^2-1\right) = -\dot{y}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= 4x^2y^3 - 2y - 2x^2y = 2y\left(2x^2y^2 - x^2 - 1\right) = \dot{x}, \end{aligned}$$

così che si ha

$$\dot{H} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = -\dot{y}\dot{x} + \dot{y}\dot{x} = 0,$$

e quindi H è effettivamente una costante del moto.

2.2. Punti d'equilibrio. I punti d'equilibrio sono i punti (x,y) in cui si annulla il campo vettoriale.

Si ha $\dot{y} = 0$ per $x = 0$ oppure per $y = 0$ oppure per $y = \pm 1$.

Se $x = 0$ l'equazione $\dot{x} = 0$ richiede $y = 0$.

Se $y = 0$ l'equazione $\dot{x} = 0$ è identicamente soddisfatta.

Se $y = \pm 1$ l'equazione $\dot{x} = 0$ richiede $2y(x^2-1) = 0$, quindi $y = 0$ (che è un sottocaso del caso precedente) oppure $x = \pm 1$.

In conclusione si hanno infiniti punti d'equilibrio: i punti isolati

$$P_1 = (1,1), \qquad P_2 = (-1,1), \qquad P_3 = (-1,-1), \qquad P_4 = (1,-1).$$

e tutti i punti della retta $y = 0$.

2.3. Stabilità dei punti d'equilibrio. Parte I. Il sistema linearizzato in un intorno di un punto d'equilibrio (x,y) ha matrice

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy\left(2y^2-1\right) & 12x^2y^2 - 2x^2 - 2 \\ -2y^2\left(y^2-1\right) & -4xy\left(2y^2-1\right) \end{pmatrix},$$

così che si ha

$$A(\sigma, \mu) = \begin{pmatrix} 4\sigma\mu & 8 \\ 0 & -4\sigma\mu \end{pmatrix},$$

per $\sigma, \mu = \pm 1$. Quindi gli autovalori sono $\lambda = \pm 4$ per i quattro punti d'equilibrio P_1, P_2, P_3, P_4: essi sono quindi punti d'equilibrio instabile.

Per i punti $P = (x, 0)$ si ottiene

$$A(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2\left(x^2+1\right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi non si può concludere nulla. Rimandiamo a dopo la discussione della stabilità di tali punti d'equilibrio.

2.4. Curva di livello per $E = 0$. La curva di livello Γ_0 è costituita dall'unione delle curve

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1, \right\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -1, \right\}, \\ \mathcal{C}_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1/x, \quad x \neq 0 \right\}, \\ \mathcal{C}_4 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -1/x, \quad x \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

ed è quindi costituita da 18 orbite distinte: 4 punti d'equilibrio e 14 orbite asintotiche ai punti d'equilibrio nel futuro o nel passato. Cfr. la Figura 1.

Per determinare il verso di percorrenza, lungo la curva $\mathcal{C}_1$, definita da $y = 1$, si deve tener conto che lungo tale retta si ha $\dot{y} = 0$ e

$$\dot{x} = 2\left(x^2 - 1\right) \begin{cases} > 0, & \text{se } |x| > 1, \\ < 0, & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

Lungo la curva $\mathcal{C}_2$, definita da $y = -1$ si ha $\dot{y} = 0$ e

$$\dot{x} = -2\left(x^2 - 1\right) \begin{cases} > 0, & \text{se } |x| < 1, \\ < 0, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Lungo la curva $\mathcal{C}_3$, definita da $y = 1/x$, $x \neq 0$, si ha

$$\dot{y} = -\frac{2}{x^3}\left(1 - x^2\right).$$

Quindi se $x > 0$ si ha $\dot{y} > 0$ se $x > 1$ e $\dot{y} < 0$ se $x < 1$, mentre se $x < 0$ si ha $\dot{y} > 0$ se $x < -1$ e $\dot{y} < 0$ se $x > -1$.

Lungo la curva $\mathcal{C}_4$, definita da $y = -1/x$, $\neq 0$, si ha

$$\dot{y} = \frac{2}{x^3}\left(1 - x^2\right).$$

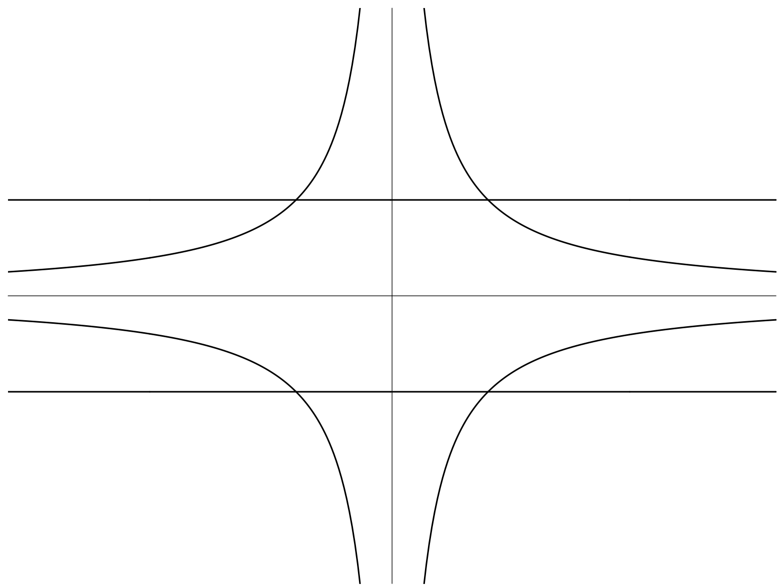

Figura 1. Curva di livello Γ_0.

Quindi se $x > 0$ si ha $\dot{y} > 0$ se $x < 1$ e $\dot{y} < 0$ se $x > 1$, mentre se $x < 0$ si ha $\dot{y} > 0$ se $x > -1$ e $\dot{y} < 0$ se $x < -1$.

2.5. Curva di livello per $E = 1$. Per $E = 1$ si ha

$$x^2 y^2 - 1 = \frac{1}{y^2 - 1},$$

e quindi, se $y \neq 0$,

$$x^2 = \frac{1}{y^2}\left(1 + \frac{1}{y^2 - 1}\right) = \frac{1}{y^2 - 1} \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Possiamo quindi esprimere y in funzione di x, e troviamo

$$y = \pm\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \equiv \pm f(x).$$

Quindi $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è una funzione crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$ (poiché $f'(x) = -1/(f(x)x^3)$), e si ha

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1.$$

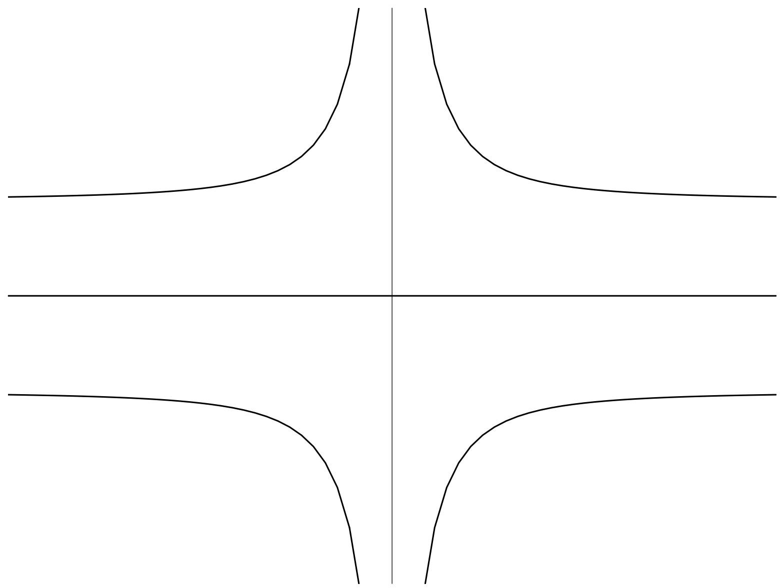

Figura 2. Curva di livello Γ_1.

Se invece $y = 0$ l'equazione $H(x, y) = (y^2 - 1)(x^2y^2 - 1) = 1$ si riduce a $1 = 1$, ed è quindi identicamente soddisfatta per ogni x.

In conclusione si ha

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \mathcal{C}_1' \cup \mathcal{C}_2' \cup \mathcal{C}_3', \\
\mathcal{C}_1' &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0 \right\}, \\
\mathcal{C}_2' &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f(x) \right\}, \\
\mathcal{C}_3' &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -f(x) \right\}.
\end{aligned}$$

I versi di percorrenza si possono ottenere ragionando come nel caso precedente, o più semplicemente, per continuità. Cfr. la Figura 2.

2.6. Altre curve di livello. Le altre curve di livello si possono ottenere utilizzando la continuità della funzione $H(x, y)$ e la dipendenza continua dai dati iniziali. Cfr. la Figura 3.

2.3bis. Stabilità dei punti d'equilibrio. Parte II. Dall'analisi qualitativa discussa ai punti precedenti si vede in particolare che esistono orbite vicino quanto si

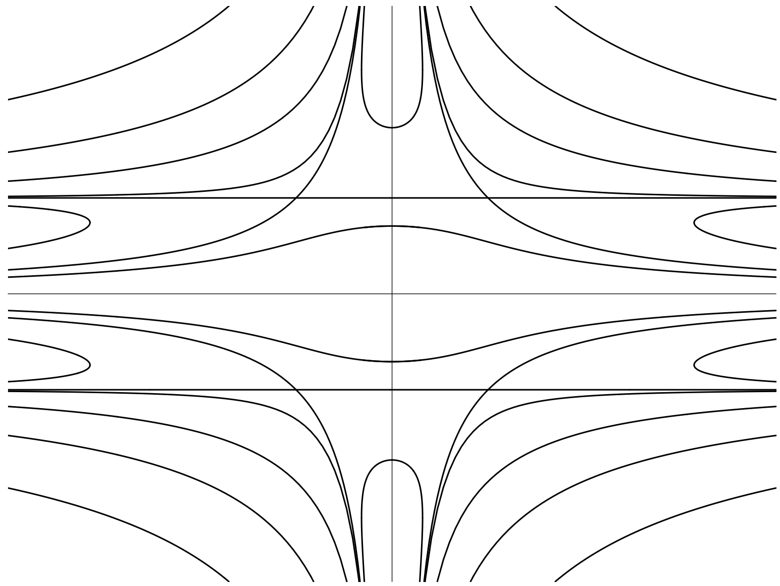

Figura 3. Spazio delle fasi del sistema.

vuole all'asse $y = 0$. Comunque si consideri un intorno B di un punto $(x, 0)$ e un dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) \in B$ si vede che la traiettoria con quel dato iniziale si avvicina all'asse $y = 0$ sia nel passato sia nel futuro in modo tale che risulti $x(t) \to \pm\infty$, e quindi esce dall'intorno B in un tempo finito. Questo implica che i punti d'equilibrio della forma $P = (x, 0)$ sono tutti punti d'equilibrio instabile.

2.7. Traiettoria con dato iniziale (2,1). Il dato iniziale $(2, 1)$ si trova sulla curva di livello Γ_0, più precisamete sulla semiretta $x > 1$ della curva $\mathcal{C}_1$. Quindi si ha $x(t) > 1$ e $y(t) = 1$ per ogni t per cui la soluzione è definita. Inoltre la traiettoria è asintotica al punto d'equilibrio P_1 nel passato e all'infinito (lungo $\mathcal{C}_1$) nel futuro. Quindi l'intervallo massimale in cui è definita la soluzione è della forma $(-\infty, t_1)$, con $t_1 \leq \infty$, e si ha $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 1$ e $\lim_{t\to t_1} x(t) = \infty$.

Se $y = 1$ otteniamo

$$\dot{x} = 2\left(x^2 - 1\right),$$

che si può risolvere per separazione di variabili. Si ha

$$\int_2^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1} = 2\int_0^t \mathrm{d}t = 2t,$$

e quindi

$$\frac{1}{2}\left(\log|x(t)-1| - \log|x(t)+1|\right) - \frac{1}{2}\log\frac{1}{3} = 2t,$$

e possiamo eliminare i moduli negli argomenti dei logaritmi poiché $x(t) > 1$.

Quindi

$$\log\frac{x(t)-1}{x(t)+1} = \log\frac{1}{3} + 4t,$$

da cui si ottiene

$$\frac{x(t)-1}{x(t)+1} = \frac{1}{3}e^{4t} \quad \Rightarrow \quad 3\left(x(t)-1\right) = \left(x(t)+1\right)e^{4t},$$

che si può risolvere, ottenendo così

$$x(t) = \frac{3+e^{4t}}{3-e^{4t}},$$

che implica $t_1 = (\log 3)/4$.

2.7. Assenza di traiettorie periodiche. Una traiettoria periodica si svolge su un'orbita chiusa. Dobbiamo quindi l'escludere che possano esistere orbite chiuse. La curva di livello Γ_0 divide il piano in regioni aperte sconnesse. In tali regioni il segno di una delle due componenti del campo vettoriale ($\dot{x}$ oppure $\dot{y}$) ha sempre lo stesso segno, tranne che nelle regioni

$$\mathcal{A}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 1, \quad y < 1/|x|\right\},$$
$$\mathcal{A}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < -1, \quad y < 1/|x|\right\}.$$

Però in tali regioni si ha $\dot{y} < 0$ per $x > 0$ e $\dot{y} > 0$ per $x > 0$; inoltre le treiettorie attraversano l'asse $x = 0$ una sola volta. Quindi anche in tali regioni le traiettorie non si possono chiudere