

I Settimana:

Nozione intuitiva di insieme. Operazioni tra insiemi (unione, intersezione, differenza, complementare) e loro proprietà. Differenza simmetrica di due insiemi. Insieme delle parti. Esempi.

Elementi di logica elementare. Tabelle della verità. Negazioni e quantificatori universali. Vari tipi di dimostrazione per assurdo.

II Settimana:

Copie ordinate. Prodotto cartesiano di due insiemi. Grafici. Corrispondenze. Relazioni binarie. Applicazioni o funzioni. Esempi. Corrispondenza inversa di una applicazione. Applicazione identica ed applicazioni costanti.

Esempi. Prodotto operatorio di applicazioni e sue prime proprietà. Applicazioni suriettive, iniettive e biettive: definizioni.

III Settimana:

Caratterizzazioni delle applicazioni iniettive, suriettive e biettive. Esempi. Famiglie di oggetti. Funzione caratteristica di un sottoinsieme.

Ricoprimenti e partizioni. Relazioni d'equivalenza. Classi d'equivalenza. Insieme quoziente. Relazioni d'equivalenza e partizioni. Esempi.

IV Settimana:

Relazione d'equivalenza ("nucleo") associata ad una applicazione. Teorema fondamentale di decomposizione di una applicazione. Esempi.

Biiezione tra l'insieme delle parti di un insieme X e l'insieme $\{0, 1\}^X$.

Assiomi di Peano; addizione, moltiplicazione e relazione d'ordine nell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali. Principio di induzione (e sua formulazione forte). Principio del Buon Ordinamento. Dimostrazioni per induzione. Esempi.

V Settimana:

Divisione con il resto. Esistenza di MCD e mcm, Algoritmo delle divisioni successive per la determinazione del MCD. Identità di Bézout. Lemma di Euclide.

Numeri primi. Elementi irriducibili. Teorema fondamentale dell'aritmetica.

VI Settimana:

Teorema sulla infinità dei numeri primi. Crivello di Eratostene.

Operazioni e loro proprietà. Elementi neutri e invertibili. Unicità dell'elemento neutro e dell'inverso di un elemento. Notazione additiva e moltiplicativa. Esempi.

Congruenze. Addizione e moltiplicazione nell'insieme quoziente \mathbb{Z}/\equiv_n delle classi resto modulo un intero $n > 1$. Principali proprietà algebriche di $(\mathbb{Z}/\equiv_n, +, \cdot)$. Elementi invertibili e "divisori dello zero" in \mathbb{Z}/\equiv_n .

VII Settimana:

Calcolo di un inverso aritmetico mod n . Congruenze lineari in una indeterminata. Criterio di risolubilità, numero di soluzioni e ricerca di soluzioni. Esempi.

Sistemi di congruenze lineari. Teorema cinese del resto. Risoluzione di

sistemi di congruenze lineari. Il piccolo teorema di Fermat. Indicatore di Eulero. Il teorema di Eulero-Fermat.

VIII Settimana:

Gruppi. Gruppi abeliani. Esempi. Prime proprietà. Leggi di cancellazione. Il gruppo delle trasformazioni di un insieme. Prime proprietà del gruppo S_n . Cicli e teorema di decomposizione. Trasposizioni, parità di una permutazione.

IX Settimana:

Ordine di un elemento di un gruppo. Sottogruppi. Esempi. Omomorfismi di gruppi. Esempi.

Anelli. Esempi. Prime proprietà. Anelli commutativi ed unitari. Esempi. Elementi invertibili e zero-divisori. Domini d'integrità. Campi. Esempi. Caratteristica di un anello commutativo unitario. Esempi. Sottoanelli. Omomorfismi di anelli.

X Settimana:

Elementi invertibili ed associati in un dominio d'integrità. Campo dei quozienti di un dominio d'integrità.

Polinomi in una indeterminata a coefficienti in un anello commutativo unitario: somma e prodotto (di convoluzione). Grado: prime proprietà. Polinomi a coefficienti in un dominio d'integrità.

Polinomi invertibili ed associati.

Algoritmo di divisione tra polinomi.

XI Settimana:

Esistenza ed unicità del MCD monico in $K[X]$ con K campo. Identità di Bézout. Metodo delle divisioni successive per la determinazione del MCD. Esempi.

Radici di un polinomio. Teorema del resto. Regola di Ruffini. Esempi. Funzioni polinomiali: domini finiti ed infiniti. Ricerca di radici intere e razionali di polinomi a coefficienti interi. Polinomio derivato. Radici multiple.

Elementi primi ed irriducibili in un dominio.

Polinomi irriducibili.

XII Settimana:

Esistenza di radici e riducibilità. Teorema di fattorizzazione unica in $K[X]$ con K campo.

Polinomi a coefficienti numerici. Enunciato del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Polinomi irriducibili di $\mathbb{C}[X]$ e di $\mathbb{R}[X]$.

Polinomi a coefficienti interi: contenuto di un polinomio, polinomi primitivi. Lemma di Gauss. Teorema di fattorizzazione unica in $\mathbb{Z}[X]$. Polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$ ed in $\mathbb{Q}[X]$.

Criterio di irriducibilità di Eisenstein. Esempi ed applicazioni (irriducibilità del p -polinomio ciclotomico).

Criterio di irriducibilità modulo un primo p .