Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Appello C
30 Giugno 2010

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :
$$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \cdots \cdot (4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}.$$
   (b) Sia $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $r + \frac{1}{r} \in \mathbb{Z}$. Utilizzando l' induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 2$ anche $r^n + \frac{1}{r^n} \in \mathbb{Z}$.

2. Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da:

$$(x, y) \longmapsto 253x - 65y + 137$$

   (a) Stabilire se l'applicazione f è iniettiva.
   (b) Trovare $\mathtt{Im}(f)$.
   (c) Sia ρ_f la relazione nucleo di f. Trovare tutti gli elementi di $[(1, -3)]_{\rho_f}$.

3. Sia X un insieme non vuoto. Nell'insieme

$$X^X = \{f : X \longrightarrow X \ \mid \ f \text{ è una applicazione}\}$$

si consideri la seguente relazione d'ordine $\leqslant$:

$$f \leq g :\Longleftrightarrow f = g \text{ oppure } \mathtt{Im}(f) \subsetneq \mathtt{Im}(g).$$

(a) Stabilire se la relazione d'ordine $\leq$ in X^X è totale.

(b) Calcolare gli eventuali elementi massimali, minimali, massimo e minimo.

(c) Se $X = \{1, 2, 3\}$, elencare gli elementi minimali e gli elementi massimali di $(X^X, \leq)$.

4. Trovare tutti i generatori dei seguenti gruppi ciclici:

   (a) il gruppo moltiplicativo delle radici 8 dell'unità, $\mathcal{C}_8$;

   (b) il gruppo additivo $\mathbb{Z}_{11}$;

   (c) il gruppo moltiplicativo $U(\mathbb{Z}_{11})$;

   (d) il sottogruppo di S_8 generato da

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 6 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Si considerino i seguenti anelli:

   (a) $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$;

   (b) $(\mathbb{Q}(i), +, \cdot)$, con $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

   (c) $(\mathbb{Z}_7[X], +, \cdot)$;

   (d) $\big(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ applicazione}\}, +, \cdot\big)$, con $+, \cdot$ definiti nel seguente modo:

   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

   $\forall x \in \mathbb{Z}, \ \forall f, g \in Z^{\mathbb{Z}}$.

   i) Stabilire quali di essi sono domini d'integritá e quali sono campi.

   ii) Per ciascuno degli anelli dati, determinare la caratteristica e l'insieme (gruppo) degli elementi invertibili.

6. (a) Sia dato il polinomio $f(X) = 2X^7 + 4X^6 - 6X - 12 \in A[X]$. Decomporre $f(X)$ in fattori irriducibili in $A[X]$, per $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_{13}$.

   (b) Sia $g(X) = X^4 + 6X^3 + 12X^2 + 12X + 7 \in \mathbb{Z}[X]$; determinare un numero intero α in modo tale che a $g(X - \alpha)$ si possa applicare il criterio di Eisenstein.