Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Prima prova di valutazione intermedia
5 novembre 2009

*Cognome*____________________ *Nome*_________________________

*Numero di matricola*____________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

1. (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha :

$$7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

   (b) Siano i numeri a_n definiti da $a_1 = 11$, $a_2 = 21$, e $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ per $n \geqslant 3$. Utilizzando il principio di induzione forte, provare che per ogni numero naturale $n \geqslant 1$ si ha:

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1$$

2. Siano $X = \{a, b, c\}$ ed $Y = \{1, 2\}$. Sia

$$S := \{(X_i, f_i) : \emptyset \neq X_i \subseteq X \text{ e } f_i : X_i \to Y \text{ applicazione}\} .$$

Si definisca su S la seguente relazione ρ:

$$(X_i, f_i)\rho(X_k, f_k) :\Longleftrightarrow X_i \subseteq X_k, \quad \text{e} \quad f_{k_{|X_i}} = f_i.$$

(a) Dimostrare che ρ è una relazione d'ordine.

(b) Determinare gli eventuali elementi massimali, minimali, massimo e minimo di S rispetto a ρ.

*Cognome*___________________ *Nome*________________________

*Numero di matricola*___________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. Non è consentito l'uso di libri, appunti. E' consentito l'uso della calcolatrice.

3. Per il teorema fondamentale dell'aritmetica per ogni numero naturale positivo n esistono e sono unici $\alpha, h \in \mathbb{N}$ tali che $n = 7^\alpha h$ e $\mathrm{MCD}(7, h) = 1$. Si consideri in $\mathbb{N}_+$ la seguente relazione R:

$$(7^\alpha h)R(7^\beta k) :\Longleftrightarrow \alpha = \beta$$

   (a) Verificare che R è una relazione d'equivalenza in $\mathbb{N}_+$.

   (b) Determinare $[4]_R$ e $[147]_R$.

   (c) Determinare la partizione di $\mathbb{N}_+$ associata alla relazione R.

   (d) Trovare una applicazione g di dominio $\mathbb{N}_+$ tale che la relazione nucleo di g coincide con R.

4. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione definita da:

$$x \longmapsto \begin{cases} x^3 & \text{se } |x| \leqslant 5 \\ [x] & \text{se } |x| > 5 \end{cases}$$

con $[x]$ parte intera di x (cioè il più grande intero minore od uguale ad x).

(a) Stabilire se l'applicazione f è iniettiva.

(b) Descrivere $\mathtt{Im}(f)$.

(c) Sia ρ_f la relazione nucleo di f. Descrivere $[3]_{\rho_f}$ e $[\frac{1}{3}]_{\rho_f}$.

5. Trovare le radici ottave di 16.

6. Siano a, b numeri interi non entrambi nulli. Provare che se MCD(a, b)=1, allora MCD$(a + b, ab)$=1