

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Esercizi 2 (9 ottobre 2009)

Esercizio 1. Sia $S := \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ l'insieme dei sottoinsiemi non vuoti di \mathbb{N} . Si definisca, dati comunque $A, B \in S$, la seguente relazione:

$$A\rho B :\iff A = B \quad \text{oppure} \quad a \leq b \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Dimostrare che ρ è una relazione d'ordine. Determinare eventuali elementi massimali, minimali, massimo e minimo di S rispetto a ρ .

Esercizio 2. (a) Utilizzando il principio di induzione si dimostri che, per ogni $n \geq 1$, si ha:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

(b) Si consideri la seguente successione di numeri naturali:

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ per ogni } n \geq 3;$$

utilizzando il principio di induzione forte, provare che, per ogni $n \geq 1$, si ha:

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

Esercizio 3. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 2$, si ha:

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1).$$

Esercizio 4. Si consideri la seguente successione di numeri naturali:

$$a_1 = 5, a_2 = 7, \text{ e per ogni } n \geq 3, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

Provare che per ogni $n \geq 2$, $a_n = 3 + 2^n$.

Esercizio 5. Sia X un insieme non vuoto. Si denoti con $Y := X^X$ l'insieme di tutte le applicazioni $f : X \rightarrow X$. Si definisca su Y la seguente relazione ρ :

$$f\rho g :\iff f = g \quad \text{oppure} \quad \text{Im}(f) \subsetneq \text{Im}(g).$$

Verificare che ρ è una relazione d'ordine e determinare gli eventuali elementi massimali e minimali di Y rispetto a ρ .

Esercizio 6. Sia

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{se } |x| < 10 \\ 10 & \text{se } |x| \geq 10 \end{cases}$$

(a) Mostrare che f non è iniettiva né suriettiva.

(b) Descrivere $\text{Im}(f)$.

(c) Calcolare la classe $[10]_{\rho_f}$ e l'insieme quoziente \mathbb{Z}/ρ_f .

(d) Decomporre f tramite la relazione nucleo ρ_f .