Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Esercizi 9 (26 novembre 2009)

Esercizio 1. Sia dato l'insieme

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$$

Domostrare che G è un gruppo rispetto alla somma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}.$$

Calcolare poi l'ordine degli elementi

$$\begin{pmatrix} [0]_3 & [1]_3 \\ c & [0]_3 \end{pmatrix}, \quad \text{al variare di } c \in \mathbb{Z}_3.$$

Esercizio 2. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) G è abeliano.

(b) Per ogni $a, b \in G$ si ha $(ab)^2 = a^2b^2$.

(c) Per ogni $a, b \in G$ si ha $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Esercizio 3. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, l'insieme:

$$A_n := \{\sigma \in S_n : \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$$

è un sottogruppo di S_n (detto gruppo *alterno* su n elementi). Stabilire poi se A_n è abeliano oppure no.

Quanti elementi ha A_n?

Esercizio 4. Descrivere esplicitamente il gruppo $(A_4, \circ)$.

Esercizio 5. Sia $(R, +, \cdot)$ un anello e si consideri l'insieme

$$\mathcal{M}_n(R) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in R, \forall i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Si definiscano su $\mathcal{M}_n(R)$ le seguenti operazioni:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn-1} & a'_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & \dots & a_{1n}+a'_{1n} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & \dots & a_{2n}+a'_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+a'_{n1} & \dots & a_{nn-1}+a'_{nn-1} & a_{nn}+a'_{nn} \end{pmatrix},$$

e il prodotto *righe per colonne*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn-1} & a'_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn-1} & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{dove } b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a'_{ki}.$$

Dimostrare che:

(a) Dimostrare che $\mathcal{M}_n(R)$ è un anello (detto *anello delle matrici quadrate* $n\times n$ *a coefficienti in* R).

(b) Dimostrare che se R è unitario allora $\mathcal{M}_n(R)$ è unitario.

(c) Mostrare con un esempio che, anche quando R è commutativo, $\mathcal{M}_n(R)$ può non essere commutativo.

Esercizio 6. Dimostrare che se $p \in \mathbb{Z}$ è un primo, allora $\sqrt{p}$ è irrazionale.

Esercizio 7. Si consideri $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ è un anello (commutativo, unitario, integro) rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(b) Determinare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Sia poi $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Dimostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è un campo con le usuali operazioni di somma e prodotto.

Esercizio 8. Sia $X \neq \emptyset$ un insieme e $(R, +, \cdot)$ un anello. Si consideri:

$$\mathcal{F}(X, R) := \{f : X \to R : f \text{ applicazione}\}.$$

Si definiscano, date comunque $f, g \in \mathcal{F}(X, R)$:

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f * g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

(a) Dimostrare che $(\mathcal{F}(X, R), \oplus, *)$ è un anello.

(b) Dimostrare che se R è commutativo allora $\mathcal{F}(X, R)$ è commutativo.

(c) Dimostrare che se R è unitario, allora $\mathcal{F}(X, R)$ è unitario.

(d) Mostrare che $\mathcal{F}(\{1, 2\}, \mathbb{Z})$ non è integro e dedurne che, anche quando R è integro, $\mathcal{F}(X, R)$ può non essere integro.