Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
AL110 - Algebra 1
Tutorato 1 (28 settembre 2009)
E. Di Gloria - D. Menichetti

1. Sia $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 55\}$. Siano $B = \{x \in A \mid x = 6n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{x \in A \mid x = 10m \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$.

   Determinare $B \cup C$, $B \cap C$, $B - C$ e $B \times C$.

2. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0\}$ e $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^4 - 5y^2 + 4 = 0\}$.

   Determinare $\mathcal{P}(A)$ e $A \times B$.

3. Siano $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 12n \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 40m \text{ con } m \in \mathbb{Z}\}$. Determinare $A \cap B$.

4. Siano r ed s numeri naturali positivi. Siano

   $$A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = rn \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$$

   $$A_s = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = sm \text{ con } m \in \mathbb{Z}\}.$$

   Determinare $A_r \cap A_s$.

5. Siano X un insieme non vuoto, A e B suoi sottoinsiemi; dimostrare che:

   (a) $A \cap B \subseteq A \cup B$;
   (b) $A \cap B = A \cup B \Longleftrightarrow A = B$;
   (c) $\mathcal{C}A \subseteq B$ e $\mathcal{C}A \neq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$; è vero il viceversa?
   (d) $\mathcal{C}(A \cap \mathcal{C}B) \cup B = \mathcal{C}A \cup B$;
   (e) $B = (A \cap \mathcal{C}B) \cup (\mathcal{C}A \cap B) \Longleftrightarrow A = \emptyset$;
   (f) $A - B = \mathcal{C}B - \mathcal{C}A = A \cap \mathcal{C}B$.
   (g) $A = B \Longleftrightarrow \mathcal{C}B = \mathcal{C}A$.

6. Siano X un insieme non vuoto, A, B e C suoi sottoinsiemi; dimostrare che:

   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   (c) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \cup C) = A \cap B$;
   (d) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Longleftrightarrow C \subseteq A$;
   (e) $A \cap B \subset \mathcal{C}C$, $A \cup C \subset B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$.

7. Siano $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{a, b\}$. Trovare $(C \times A) \cap (C \times B)$ e $(A \cap B) \times C)$.

8. Trovare per quali numeri reali x e y si ha che $(2x + 3y, 0) = (2, 4x - y)$.

9. Siano $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b\}$.
   (a) Dare un esempio di relazione da X in Y.
   (b) Dare un esempio di relazione da Y in X.
   (c) Dare un esempio di applicazione da X in Y.
   (d) Dare un esempio di applicazione da Y in X.
   (e) Scrivere esplicitamente tutte le applicazioni da Y in X.

10. Siano $X = \{a, b, c, d, e\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $X \times Y$ sono grafici di applicazioni:
    (a) $G = \{(e, 2), (c, 2), (d, 2), (a, 8)\}$;
    (b) $G = \{(b, 3), (c, 1), (d, 7), (e, 7), (a, 3), (b, 5)\}$;
    (c) $G = \{(b, 2), (c, 2), (d, 5), (a, 7), (e, 2)\}$;
    (d) $G = \{(b, 2), (c, 8), (d, 7), (e, 1), (a, 3)\}$.

11. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono grafici di applicazioni:
    (a) $G = \{(x, y) \mid 2x - 3y = 18\}$;
    (b) $G = \{(x, y) \mid 2x^2 - 3y = 18\}$;
    (c) $G = \{(x, y) \mid 2x - 3y^2 = 18\}$;
    (d) $G = \{(x, y) \mid 2x^2 - 3y^2 = 18\}$.

12. Siano $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ definite da:
    (a) $f(x) = 2x - 1, \;\; g(y) = 3y + 8$;
    (b) $f(x) = 2x - 1, \;\; g(y) = y^2$;
    (c) $f(x) = x^3, \;\; g(y) = y^4$.

    Calcolare $g \circ f$ e $f \circ g$.

13. (a) Sia $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f(n) = 7n + 3$ per ogni $n\mathbb{Z}$. Determinare $f^{-1}(17)$, $f^{-1}(-19)$, $f^{-1}(\{26, \, -31, \, 0\})$.
    (b) Sia $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'applicazione definita da $g(x) = 7x + 3$ per ogni $x\mathbb{Q}$. Determinare $g^{-1}(17)$, $g^{-1}(-19)$, $g^{-1}(\{26, \, -31, \, 0\}$.

14. Sia $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ l'applicazione definita per $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ da $f(x) = \frac{2x-1}{3x-2}$.
    (a) Verificare che f è biiettiva.
    (b) Determinare esplicitamente f^{-1}.

15. Sia $f : X \longrightarrow X$ un'applicazione tale che $f \circ f = id_X$. Verificare che f è biiettiva.