

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Prima prova di valutazione intermedia
11 aprile 2011

Cognome_____ Nome_____

Numero di matricola_____

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Trovare, al variare del parametro λ ($0 \leq \lambda \leq 10$), le soluzioni del seguente sistema lineare in due variabili:

$$\begin{cases} X + \lambda Y \equiv 5 \pmod{11} \\ 2\lambda X + 2Y \equiv -1 \pmod{11} \end{cases}$$

2. Un numero naturale n si dice perfetto se $\sigma(n) = 2n$, con $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.

Provare che:

- (a) Se p è un numero primo e k un numero naturale ≥ 1 , allora p^k non è perfetto.
- (b) Se m è un intero positivo, allora m^2 non è un numero perfetto.
- (c) Il prodotto di due numeri primi dispari distinti non è un numero perfetto.
- (d) Se n è un numero perfetto, allora $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$.

3. (a) Provare che se p è un numero primo, allora

$$(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}.$$

(b) Provare che se p è un numero primo dispari, allora

$$(p-3)! \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}.$$

4. Determinare il più piccolo intero positivo soluzione del seguente sistema di congruenze lineari:

$$\begin{cases} 6X \equiv 10 \pmod{16} \\ 15X \equiv 21 \pmod{27} \\ 4X \equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$$

5. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni della seguente congruenza polinomiale:

$$f(X) = X^3 - 134X^2 + 66X + 451 \equiv 0 \pmod{845}$$

6. (a) Sapendo che 2 è una radice primitiva modulo 11, determinare tutte le radici primitive modulo 22.
- (b) Risolvere le seguenti congruenze:
- (c) $X^8 \equiv 15 \pmod{22}$;
- (d) $13X^{20} \equiv 9 \pmod{22}$;
- (e) $3^X \equiv 15 \pmod{22}$.