

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
TN410 - Introduzione alla Teoria dei Numeri
Alfonso Pesiri
Esercitazione del 7/04/2011

Esercizio 1

Mostrare che vale la seguente relazione: $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema di congruenze in due incognite:

$$\begin{cases} aX + bY \equiv e(p) \\ cX + dY \equiv f(p) \end{cases}$$

Sia poi $\Delta := ad - bc$, $\alpha := de - bf$, $\beta := af - ce$, con $(a, b, p) = 1$ e $(c, d, p) = 1$. Mostrare che valgono le seguenti:

- (a) se $\Delta \equiv \alpha \equiv \beta \equiv 0(p)$, allora il sistema ammette p soluzioni modulo p ;
- (b) se $\Delta \equiv 0(p)$ e $\alpha \not\equiv 0(p)$ e/o $\beta \not\equiv 0(p)$, allora il sistema non ammette soluzioni;
- (c) se $\Delta \not\equiv 0(p)$, allora il sistema ammette un'unica soluzione modulo p .

Esercizio 3

Trovare, al variare di λ in $[0, 6]$, tutte le soluzioni intere del seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} \lambda X + 3Y \equiv 2(7) \\ X - 2Y \equiv 4(7) \end{cases}$$

Esercizio 4

Mostrare che se f è funzione aritmetica moltiplicativa, allora la funzione aritmetica $\sigma_f := \sum_{d|n} f(d)$ è anch'essa moltiplicativa. Dedurre da ciò che la funzione aritmetica σ^k è moltiplicativa.