Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
TN410 - Introduzione alla Teoria dei Numeri
Alfonso Pesiri
Esercitazione del 12/05/2011

Esercizio 1
Mostrare che l'insieme delle funzioni aritmetiche moltiplicative diverse dalla funzione costante su 0 forma un gruppo abeliano rispetto al prodotto di Dirichlet.

Esercizio 2
Date f funzioni aritmetiche moltiplicativa non costante su 0, mostrare che:

(a) $\mu \cdot f * \mathbb{I}$ è funzione aritmetica moltiplicativa;

(b) $(\mu \cdot f * \mathbb{I})(n) = \prod_{p|n}(1 - f(p))$ se $n > 1$.

Esercizio 3
Dato $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, mostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

(a) $\sum_{d|n} d \cdot \mu(d) = \prod_{i=1}^{r}(1 - p_i)$;

(b) $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i})$;

(c) $\sum_{d|n} \mu(d) \cdot \sigma^k(d) = (-1)^r \prod_{i=1}^{r} p_i^k$.

Esercizio 4
Siano F, f funzioni aritmetiche moltiplicative, con $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Mostrare che $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot F\left(\frac{n}{d}\right)$ (**Formula di inversione di Möbius**).

Esercizio 5
Utilizzando la formula di inversione di Möbius, mostrare che

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^{\frac{n}{d}} - 1)^{\mu(d)},$$

dove $\Phi_n(x)$ denota l'n–esimo polinomio ciclotomico.