

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 7 (12 maggio 2011)
Giacomo Milizia

1. Trovare il numero delle soluzioni delle seguenti congruenze quadratiche:

(a) $X^2 \equiv 57 \pmod{2^6 \cdot 7^5 \cdot 29^6}$;

(b) $X^2 \equiv 9 \pmod{2^2 \cdot 5}$.

2. Trovare, se esistono, le soluzioni delle seguenti congruenze quadratiche:

(a) $X^2 \equiv 49 \pmod{144}$;

(b) $X^2 \equiv 25 \pmod{168}$.

3. Calcolare i seguenti simboli di Jacobi:

$$\left(\frac{776}{105}\right), \left(\frac{-424}{335}\right), \left(\frac{90}{949}\right).$$

4. Siano $n > 1$ ed $m > 1$ interi dispari tali che $n \equiv 1 \pmod{8}$ e $m \equiv 2 \pmod{n}$; calcolare il simbolo di Jacobi

$$\left(\frac{5m+n}{m}\right).$$

5. Determinare per quali valori del parametro λ , $0 \leq \lambda \leq 6$, la seguente congruenza quadratica

$$4X^2 + (\lambda - 2)X + 3\lambda \equiv 0 \pmod{7}$$

è risolubile.

6. (a) Determinare per quali valori del parametro λ , $0 \leq \lambda \leq 10$, la seguente congruenza quadratica

$$3X^2 + X + \lambda \equiv 0 \pmod{11}$$

è risolubile.

(b) Per ogni valore di λ per il quale la congruenza in (a) è risolubile determinare tutte le sue soluzioni.

7. (a) Determinare per quali valori del parametro λ , $0 \leq \lambda \leq 29$, la seguente congruenza quadratica

$$X^2 + 3X + \lambda \equiv 0 \pmod{30}$$

è risolubile.

(b) Per ogni valore di λ per il quale la congruenza in (a) è risolubile determinare tutte le sue soluzioni.

8. Provare che se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva positiva, allora $x + y$ e $x - y$ sono congruenti a 1 o 7 modulo 8.
9. Provare che se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva positiva, allora 12 divide xy ; pertanto 60 divide xyz .
10. Trovare tutti i triangoli pitagorici le cui aree sono uguali al loro perimetro.
(Sugg.: se $x^2 + y^2 = z^2$ e $x + y + z = \frac{1}{2}xy$, allora $(x - 4)(y - 4) = 8$.)
11. Provare che se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva positiva in cui x, z sono interi positivi consecutivi, allora

$$x = 2t(t + 1), \quad y = 2t + 1, \quad z = 2t(t + 1) + 1$$

per qualche $t > 0$.

12. Provare che se (x, y, z) è una terna pitagorica primitiva positiva in cui $z - y = 2$, allora

$$x = 2s, \quad y = s^2 - 1, \quad z = s^2 + 1$$

per qualche s intero positivo.