Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2010/2011
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Tutorato 9 (26 maggio 2011)
Giacomo Milizia

1. Scrivere ciascuno dei seguenti numeri interi come somma di quattro quadrati:
$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11, \quad 247 = 13 \cdot 19, \quad 1147 = 31 \cdot 37.$$

2. La successione dei numeri di Fibonacci è definita da:
$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{per} \quad n > 1.$$
   (a) Provare che per ogni $n \geqslant 1$:
   $$\sum_{j=1}^{n} f_j = f_{n+2} - 1.$$
   (b) Provare che per $n \geqslant 3$ si ha:
   $$f_n > \alpha^{n-2}$$
   con $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (c) Scrivere il rapporto $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ di due numeri di Fibonacci consecutivi con $n \geqslant 2$ come frazione continuata.

3. Rappresentare i seguenti numeri razionali con frazioni continuate finite semplici:
$$\frac{123}{13}, \quad -\frac{151}{307}, \quad \frac{383}{83}.$$

4. Determinare i numeri razionali rappresentati dalle seguenti frazioni continuate finite semplici:
$$[-3; 1, 7, 3, 1], \quad [0; 2, 6, 1, 5, 4, 2].$$

5. Sia $r = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$, con $r > 1$; provare che:
$$\frac{1}{r} = [0; a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

6. Calcolare i comvergenti delle seguenti frazioni continuate semplici:
   (a) $[2; 3, 1, 4, 2, 3]$;
   (b) $[-3; 1, 2, 1, 2, 1, 2]$;
   (c) $[0; 3, 7, 2, 8]$.

7. Risolvere le seguenti equazioni diofantee attraverso le frazioni continuate semplici:

   (a) $364X + 227Y = 1$;

   (b) $158X - 57Y = 1$.

8. Un intero $n > 1$ si dice *privo di fattori quadratici* se non è divisibile per alcun quadrato di un intero $m \neq \pm 1$. Se n è privo di fattori quadratici, allora la sua fattorizzazione è del tipo $\prod_{i=1}^{r} p_i$ con p_i primi distinti. Sia $f : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}^+$ la funzione aritmetica definita da

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 1, & \text{se } n > 1 \text{ è privo di fattori quadratici} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   (a) Dimostrare che f è moltiplicativa ma non completamente.

   (b) Costruire l'inversa di Dirichlet di f.

   (c) Calcolare $\mu f * \mathbf{1}$.

9. Si consideri la funzione moltiplicativa $F = \tau * \varphi$.

   (a) Calcolare $F(33)$ e $F^{-1}(33)$.

   (b) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(33)$.

10. Sia Λ la funzione di *von Mangoldt*, definita nel modo seguente:

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log(p) & \text{se } n = p^h,\ p \text{ numero primo },\ h \geq 1 \\ & \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

    Dimostrare che:

    (a) $\log(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d)$;

    (b) $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \left(\mu(d) \log\left(\frac{n}{d}\right)\right) = -\sum_{d|n} \left(\mu(d) \log(d)\right)$.