

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2011/2012
TN410 - Introduzione alla teoria dei numeri
Seconda prova di valutazione intermedia
31 maggio 2012

*Cognome*_____ *Nome*_____

*Numero di matricola*_____

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Si consideri la congruenza quadratica:

$$X^2 \equiv 481 \pmod{3600} \quad (*)$$

- (a) Verificare che la congruenza (*) è risolubile e determinare il numero delle sue soluzioni.
- (b) Trovare le soluzioni della congruenza (*).

2. Calcolare i seguenti simboli di Legendre:

(a) $\left(\frac{13572}{977}\right)$;

(b) $\left(\frac{9876}{379}\right)$;

(c) $\left(\frac{2468}{607}\right)$.

3. (a) Stabilire quali dei seguenti numeri sono somma di due quadrati:
- i. 1573;
 - ii. 65219 ;
 - iii. 19845.
- (b) Scrivere i numeri del punto precedente, quando possibile, come somma di due quadrati.

4. Si consideri la funzione moltiplicativa $F = \sigma * \varphi$.
- (a) Calcolare $F(35)$ e $F^{-1}(35)$.
 - (b) Sia f la funzione aritmetica determinata dalla formula di inversione di Möbius. Calcolare $f(35)$.

5. (a) Scrivere come frazione continuata $\frac{796}{47}$;
(b) calcolarne tutte le convergenti;
(c) dedurre le soluzioni dell'equazione diofantea

$$796X + 47Y = 13$$

6. Provare che per ogni intero positivo n si ha:

$$\sum_{d|n} \frac{n\sigma(d)}{d} = \sum_{d|n} d\tau(d)$$