Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL410 - Algebra Commutativa
Prima prova di valutazione intermedia
6 novembre 2014

*Cognome*___________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Sia $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$ la fattorizzazione in primi distinti di un numero naturale $n \geqslant 2$ con $e_i \geqslant 1$ per $1 \leqslant i \leqslant r$.
   (a) Provare che $a + n\mathbb{Z}$ è un elemento nilpotente dell'anello $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se e soltanto se $p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ divide a.
   (b) Provare che l'anello $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è privo di elementi nilpotenti non nulli se e solo se $e_1 = e_2 = \cdots = e_r = 1$.
   (c) Calcolare il nilradicale di $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ e di $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

2. Siano A un anello commutativo unitario, M e N A-moduli, $f : M \longrightarrow N$ e $g : N \longrightarrow M$ omomorfismi tali che $g \circ f = \mathbf{1}_M$. Provare che

$$N \simeq \mathtt{Ker}(g) \oplus \mathtt{Im}(f).$$

3. Siano A un anello commutativo unitario, $I_1, \dots, I_n$ ideali di A tali che $\bigcap_{h=1}^{n} I_h = (0)$ e $\sqrt{I_h}$ per $h = 1, \dots, n$ sono ideali massimali distinti. Provare che

$$A \cong \prod_{h=1}^{n} A/I_h.$$

4. Siano A un anello commutativo unitario e c un suo elemento; sia $S_c = \{1, c, c^2, \cdots\}$. L'anello $S_c^{-1}A$ viene usualmente denotato con A_c. Provare che
$$A_c \simeq A[X]/(cX - 1)$$

5. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti per un anello commutativo unitario A:

   (a) A_P è un dominio d'integrità per ogni ideale primo P;

   (b) A_M è un dominio d'integrità per ogni ideale massimale M;

   (c) se $a, b \in A$ sono tali che $ab = 0$, allora $\mathrm{Ann}(a)$ e $\mathrm{Ann}(b)$ sono ideali coprimi di A.

6. **(ESERCIZIO FACOLTATIVO)** Sia p un numero primo dispari; è noto che -3 è un residuo quadratico mod p se e solo se $p \equiv 1 \pmod 6$.

   Provare che:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]/p\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \cong \begin{cases} \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p & \text{se } p \equiv 1 \pmod 6 \\ \\ \mathbb{F}_{p^2} & \text{se } p \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$