

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL410 - Algebra Commutativa
Seconda prova di valutazione intermedia
9 gennaio 2015

Cognome_____ Nome_____

Numero di matricola_____

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Siano A un anello **Noetheriano** e $f : A \rightarrow A$ un omomorfismo anulare **suriettivo**. Provare che f è iniettivo.
(Sugg: si consideri la catena di ideali $\ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \dots$.)

2. Si consideri l'anello $A = \frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2+4)}$ e si ponga $\alpha = X + (X^2 + 4)$.

Provare che:

- (a) A è un dominio di integrità non campo;
- (b) descrivere il campo dei quozienti di A ;
- (c) verificare che $\frac{2}{\alpha}$ è intero su A e $\frac{2}{\alpha} \notin A$;
- (d) cosa si può dedurre da questo esempio?

3. Sia (V, M) un dominio di valutazione; provare che se P è un suo ideale primo non nullo e non massimale, allora P non è principale.

4. Sia D un MCD-dominio; provare che se I è un ideale di D invertibile, allora I è principale.

5. Siano D un dominio di Prüfer e K il suo campo dei quozienti; provare che ogni sovranello di D è integralmente chiuso.