**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015**
**AL410 - Algebra Commutativa**
**Appello A - Prima parte**
**15 gennaio 2015**

*Cognome*__________________ *Nome*_______________________

*Numero di matricola*__________________

**Avvertenza:** Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. (a) Sia $D$ un dominio con campo dei quozienti $K$ e $D \neq K$; sia $a$ un elemento **non nullo** di $D$.
   Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   i. ogni ideale primo non nullo di $D$ contiene $a$;
   ii. ogni ideale non nullo di $D$ contiene una potenza di $a$;
   iii. $K = D[\frac{1}{a}]$.

   (b) Un dominio $D$ che possiede un elemento non nullo $a$ che verifica le precedenti condizioni equivalenti si dice **dominio di Goldman.**
   Provare che un dominio ad ideali principali è un dominio di Goldman se e solo se ha un numero finito di ideali primi.

2. (a) Sia $A$ un anello commutativo unitario tale che ogni suo ideale massimale è della forma $cA$ con $c^2 = c$.

   Provare che;

   i. ogni ideale primario di $A$ è massimale;
   ii. $A$ è Noetheriano.

   (b) Dare un esempio di un anello A commutativo unitario tale che ogni suo ideale massimale è della forma $cA$ con $c^2 = c$.

3. (a) Verificare che in $\mathbb{Z}[X]$ si ha che:

$$(4, 2X, X^2) = (4, X) \cap (2, X^2) \qquad \star$$

$$(9, 3X + 3) = (3) \cap (9, X + 1) \qquad \star\star$$

(b) Provare che $\star$ e $\star\star$ sono decomposizioni primarie.

(c) Stabilire se $\star$ e $\star\star$ sono decomposizioni primarie minimali.

**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014**
**AL410 - Algebra Commutativa**
**Appello A - Seconda parte**
**15 gennaio 2015**

*Cognome*__________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*__________________

**Avvertenza:** Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Nell'anello $\mathbb{Z}[X]$ sia $I = (2X,\ X^2 - X)$; sia $S = \frac{\mathbb{Z}[X]}{I}$.

   $S$ si può riguardare come una estensione anulare unitaria di $\mathbb{Z}$.

   Provare che:

   (a) $S$ è intero su $\mathbb{Z}$;

   (b) Sia $Q = \frac{(2, X-1)}{I}$; provare che:

      i. $Q$ è un ideale massimale di $S$;

      ii. $Q$ è un ideale primo minimale di $S$;

      iii. determinare $Q \cap \mathbb{Z}$. Cosa si può dire confrontando le altezze di $Q$ e di $Q \cap \mathbb{Z}$?

2. Siano $D$ un dominio di Prüfer e $Q_1$ e $Q_2$ ideali primari di $D$.

   Provare che $Q_1$ e $Q_2$ sono coprimi oppure uno tra $Q_1$ e $Q_2$ è contenuto nell'altro.

3. Sia $D$ un dominio (non campo) **Noetheriano** in cui ogni ideale massimale $M$ è invertibile. Provare che $D$ è un **dominio di Dedekind**.