Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL410 - Algebra Commutativa
Appello B
12 febbraio 2015

*Cognome*__________________ *Nome*______________________

*Numero di matricola*__________________

Avvertenza: Svolgere ogni esercizio nello spazio assegnato, senza consegnare altri fogli e **giustificando tutte le affermazioni fatte**. E' consentito l'uso di libri, appunti e calcolatrici.

1. Sia A un anello commutativo unitario.
   (a) Provare che $Nil(A) = \{0\}$ se e solo se A è un sottoanello di un prodotto diretto di domini di integrità.
   (b) Provare che se $Jac(A) = \{0\}$, allora A è un sottoanello di un prodotto diretto di campi.
   (c) Dare un esempio di un sottoanello di un prodotto diretto di campi con radicale di Jacobson non nullo.

2. (a) Siano A un anello commutativo unitario ed I un suo ideale proprio. Provare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

   i. $\sqrt{I}$ è un ideale primo di A;
   ii. c'è un unico ideale primo minimale di I;
   iii. per tutti gli $x,\ y \in A$, $xy \in I$ implica che $x^n \in I$ oppure $y^m \in I$ con $n,\ m \in \mathbb{N}^+$.

   Un ideale I che soddisfa le precedenti condizioni equivalenti si dice ***semiprimario***.

   (b) Siano D un UFD ed a un suo elemento non nullo e non invertibile. Provare che aD è semiprimario se e solo se a è associato ad una potenza di un elemento primo di D.

3. (a) Sia D un dominio ad ideali principali; sia S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso. Provare che $S^{-1}D$ è un dominio ad ideali principali.

   (b) Sia n un intero positivo; provare che esiste un dominio ad ideali principali D tale che $|\operatorname{Max}(D)| = n$.

4. Sia $A \subseteq B$ una estensione anulare intera.

   (a) Sia $a \in A$. Provare che $a \in U(A)$ se e solo se $a \in U(B)$.

   (b) Sia J un ideale proprio di B e sia $I = J \cap A$. Provare che $A/I \subseteq B/J$ (a meno di un monomorfismo anulare) è una estensione intera.

5. Sia K un campo; sia $D = K[X^2, X^3]$. Si dia per noto che $D \cong \frac{K[Y,Z]}{(Z^2-Y^3)}$ e che $K[Y,Z]$ ha dimensione di Krull 2.

   (a) Provare che il campo dei quozienti di D è $K(X)$.

   (b) Verificare che D non è integralmente chiuso.

   (c) Determinare la chiusura integrale di D.

   (d) Sia $P = X^2D + X^3D$; verificare che P è un ideale massimale di D.

   (e) Provare che D_P è noetheriano, ha dimensione di Krull 1 e non è un DVR.