Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL410 - Algebra Commutativa
Esercizi 1

Il termine "anello" sta per "anello commutativo unitario $(1 \neq 0)$".

1. Sia A un anello ed M un suo ideale proprio. Provare che M è massimale se e solo se per ogni $a \in A - M$ esiste $x \in A$ tale che $1 - ax \in M$.

2. Determinare tutti gli ideali primi e tutti gli ideali massimali dell'anello $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

3. Sia A un anello ed α un suo elemento. provare che $\frac{A[X]}{(X-\alpha)} \simeq A$.

4. Provare che :

$$\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+1)} \cong \mathbb{C}, \qquad \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^2+1)} \cong \mathbb{Q}[i], \qquad \frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2+1)} \cong \mathbb{Z}[i]$$

5. Provare che per un campo K si ha:

$$\frac{K[X]}{(X^2-1)} \cong \frac{K[X]}{(X^2-4)}, \qquad \frac{K[X]}{(X^2+1)} \cong \frac{K[X]}{(X^2+2X+2)}, \qquad \frac{K[X,Y]}{(X+Y)} \cong K[X]$$

6. Determinare gli ideali massimali dei seguenti anelli:

$$\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2)}, \qquad \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2-3X+2)}, \qquad \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+X+1)}$$

7. Siano A un anello ed a un suo elemento.
   a si dice *nilpotente* se $a^k = 0$, per qualche intero $k \geq 1$;
   a si dice *idempotente* se $a^2 = a$.
   Provare che:
   (a) Se A non ha zero-divisori, allora l'unico elemento nilpotente di A è 0 e gli unici elementi idempotenti di A sono 0 e 1.
   (b) Nessuno elemento invertibile di A è nilpotente. L'unico elemento idempotente e invertibile di A è 1.
   (c) Se a è nilpotente, allora $1-a$ è invertibile in A (determinare esplicitamente il suo inverso). Se a è idempotente, allora $1-a$ è idempotente.
   (d) L'insieme I degli elementi nilpotenti di A è un ideale di A e l'anello-quoziente A/I è privo di elementi nilpotenti diversi dall'elemento nullo.