Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL410 - Algebra Commutativa
Esercizitazione 1
29 settembre 2014

Il termine "anello" sta per "anello commutativo unitario ($1 \neq 0$)".

1. Sia A un anello e sia $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in A[X]$.

   Provare che:

   (a) $f(X) \in A[X]$ è un elemento invertibile in $A[X]$ se e solo se a_0 è un elemento invertibile di A e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.

   (Sugg. : Se $b_0 + b_1X + + \cdots + b_mX^m$ è l'inverso di $f(X)$, provare per induzione su r che $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$. Dedurne che a_n è nilpotente ed applicare l'esercizio ????).

   (b) $f(X) \in A[X]$ è un elemento nilpotente se e solo se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono elementi nilpotenti di A.

   (c) $f(X) \in A[X]$ è uno zero-divisore in $A[X]$ se e solo esiste $a \neq 0$ in A tale che $af = 0$.

   (Sugg. : Sia $0 \neq g(X) = b_0 + b_1X + + \cdots + b_mX^m$ un polinomio di grado minimo tale che $f(X)g(X) = 0$. Se $m = 0$, l'asserto è provato. Altrimenti, $a_nb_m = 0$ da cui $a_ng(X) = 0$. Provare per induzione che $a_{n-r}g(X) = 0$ per $0 \leq r \leq n$. Dedurne che $b_mf(X) = 0$).

   (d) $Nil(A[X])$=$Jac(A[X])$.

2. Siano K un campo e $K[[X]]$ l'anello delle serie formali a coefficienti in K. Se $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n \neq 0$, sia $o(f) = \min\{n \mid a_n \neq 0\}$ e $o(0) = \infty$; $o(f)$ è detto l' *ordine* della serie formale f.

   (a) Provare che se $f, g \in K[[X]]$, allora:

      i. $o(fg) = o(f) + o(g)$.
      ii. $o(f + g) \geq \min\{o(f), o(g)\}$.
      iii. $f|g$ se e solo se $o(f) \leq o(g)$.
      iv. f è un elemento invertibile in $K[[X]]$ se e solo se $a_0 \neq 0$.
      v. Se $f \neq 0$, allora f e $X^{o(f)}$ sono associati. Dedurne che X è il solo elemento irriducibile (a meno di elementi associati) di $K[[X]]$.
      vi. $K[[X]]$ è un PID. Di fatto, ogni ideale non nullo è generato da X^m per qualche $m \geq 0$.
      vii. $K[[X]]$ possiede un solo ideale massimale e l'unico ideale primo non massimale di $K[[X]]$ è (0).

   (b) Stabilire se $K[[X]]$ è un ED.

3. Sia K un campo. $K((X))$ denoti l'insieme delle serie formali di Laurent in una indeterminata X a coefficienti in K, cioè :

$$K((X)) = \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} a_n X^n \quad | \quad a_n \in K, m \in \mathbb{Z} \ \text{qualsiasi} \right\}.$$

Si definiscano in $K((X))$ le operazioni di somma e prodotto in modo analogo a quelle definite in $K[[X]]$. Verificare che $K((X))$ è il campo dei quozienti di $K[[X]]$.