Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL410 -Algebra Commutativa
Esercizi 4

1. Siano A un anello commutativo unitario ed S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso. Sia $j_S : A \longrightarrow S^{-1}A$ l'omomorfismo canonico. Verificare che se I e J sono ideali di A si ha che:

    (a) $(I + J)^e = I^e + J^e$;

    (b) $(IJ)^e = I^e J^e$;

    (c) $(I \cap J)^e = I^e \cap J^e$;

    (d) $(\sqrt{I})^e = \sqrt{I^e}$.

2. Un anello commutativo unitario A si dice *ridotto* se il suo nilradicale è nullo.

    (a) Verificare che se A è ridotto ed S è un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso, allora anche $S^{-1}A$ è ridotto.

    (b) Sia A un anello commutativo unitario tale che, per ogni $P \in \mathrm{Spec}(A)$, l'anello A_P è ridotto. Provare che A è ridotto.

3. Siano A un anello commutativo unitario ed S un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso. Sia I un ideale di A ed $\overline{S}$ l'immagine di S in A/I.

    (a) Provare che l'applicazione canonica:

    $$\rho : (\overline{S}^{-1})(A/I) \longrightarrow S^{-1}A/IS^{-1}A$$

    definita da

    $$\rho\left(\frac{a + I}{s + I}\right) = \frac{a}{s} + IS^{-1}A$$

    è un isomorfismo di anelli.

    (b) Dedurne che se $P \in \mathrm{Spec}(A)$ con $I \subseteq P$ (da cui segue che $P/I \in \mathrm{Spec}(A/I)$), allora

    $$(A/I)_{P/I} \cong A_P/IA_P$$

(c) Dedurne che il campo residuo dell'anello locale (A_P, PA_P) è isomorfo al campo dei quozienti di A/P.

4. Sia P un ideale primo minimale di un anello ridotto A. Provare che $PA_P = (0)$ da cui $A_P = A_P/PA_P \cong q.f.(A/P)$, cioè la localizzazione di un anello ridotto A in un suo ideale primo minimale P è un campo isomorfo al campo dei quozienti di A/P.

5. Si consideri l'anello $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; determinare le localizzazioni di $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nei suoi ideali primi minimali.

6. Se A è un anello commutativo unitario con la proprietà che A_P è un dominio d'integrità per ogni $P \in \mathrm{Spec}(A)$, deve necessariamente essere A un dominio d'integrità?

7. Siano A un anello commutativo unitario e P, Q suoi ideali primi con $P \subseteq Q$. Provare che A_P è canonicamente isomorfo a $(A_Q)_{PA_Q}$. Dedurne che se A è un dominio d'integrità, per $P = (0)$, si ha un isomorfismo canonico tra $q.f.(A)$ e $q.f.(A_Q)$.

8. Sia D un dominio di integrità con campo dei quozienti K; per l'esercizio precedente, ogni localizzazione di D è immersa in K. Provare che

$$\bigcap_{M \in \mathrm{Max}(D)} D_M = D.$$

9. Siano A un anello commutativo unitario e P un suo ideale primo. Sia $j_{A \setminus P} : A \longrightarrow A_P$ l'omomorfismo canonico. Provare che per $n \in \mathbb{N}$ l'ideale $(P^n)^{ec}$ è un ideale P-primario di A, detto *la n-esima potenza simbolica di* P e denotato con $P^{(n)}$.