Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL410 -Algebra Commutativa
Esercizi 5

1. Sia K un campo; nell'anello $K[X,Y,Z]$ siano $P_1 = (X,Y)$, $P_2 = (X,Z)$ ed $M = (X,Y,Z)$. Sia $I = P_1P_2$. Provare che $I = P_1 \cap P_2 \cap M^2$ è una decomposizione primaria minimale di I; stabilire quali sono i primi isolati e quelli immersi.

2. Sia R un anello commutativo ed u un elemento invertibile di un anello S contenente R.

   (a) Provare che u^{-1} è intero su R se e solo se $u^{-1} \in R[u]$.

   (b) Provare che $R[u] \cap R[u^{-1}]$ è intero su R.
   (Sugg. : sia $s \in R[u] \cap R[u^{-1}]$; allora $s = r_0 + \cdots + r_m u^m = t_0 + \cdots + t_n u^n$ con $r_0, \cdots, r_m, t_0, \cdots, t_n \in R$. Si consideri lo R-modulo generato da $\{1, u, \cdots, u^{m+n-1}\}$.

3. Sia D un dominio d'integrità, P un ideale primo non nullo di D finitamente generato contenuto propriamente in I. Sia x un elemto del campo dei quozienti di D tale che $xI \subseteq D$. Provare che x è intero su D.

4. Sia K un campo ed R l'anello delle serie formali
   del tipo $a_0 + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots$.

   (a) Provare che R non è integralmente chiuso.

   (b) Determinare la chiusura integrale di R.

5. Sia D un MCD-dominio.
   Provare che:

   (a) MCD(ab, ac)=aMCD(b, c);

   (b) se MCD$(a, b) = d$, allora MCD$(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$;

   (c) se MCD(a, b) =MCD$(a, c) = 1$, allora MCD$(a, bc) = 1$;

   (d) se MCD$(c, a) = 1$ e c divide ab, allora c divide b.

6. Provare che un MCD-dominio è integralmente chiuso.

7. Sia D un MCD-dominio. Un polinomio $f(X) \in D[X]$ non nullo si dice *primitivo* se il MCD dei suoi coefficienti è 1. Provare il lemma di Gauss: il prodotto di due polinomi primitivi è primitivo.

8. Provare che se D è un MCD-dominio, allora $D[X]$ è un MCD-dominio.