Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL410 -Algebra Commutativa
Esercizi 6

1. Siano K un campo e D un suo sottoanello; sia $U = U(D)$ l'insieme degli elementi invertibili di D. U è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $K^* = K - \{0\}$. Nel gruppo $G = K^*/U$ si consideri la seguente relazione: siano $\alpha = xU$ e $\beta = yU$ elementi di G con $x, y \in K^*$

$$xU \leqslant yU \qquad \Longleftrightarrow \qquad yx^{-1} \in D$$

Provare che:

   (a) $\leqslant$ è ben definita;

   (b) $xU \leqslant yU \qquad \Longleftrightarrow \qquad xD \supseteq yD$;

   (c) $\leqslant$ è una relazione d'ordine parziale in G;

   (d) $\leqslant$ è compatibile con l'operazione di G;

   (e) Sia V un dominio di valutazione con campo dei quozienti K. Provare che:

      i. $(G = K^*/U(V), \leqslant)$ è totalmente ordinato;

      ii. l'applicazione

$$v : K^* \longrightarrow G = K^*/U(V)$$

      definita da $v(x) = xU(V)$ è una valutazione su K il cui anello di valutazione è V.

2. Provare che se D è un dominio integralmente chiuso, allora $D[X]$ è integralmente chiuso.

   (Sugg.: ricondursi al caso in cui D è un dominio di valutazione)

3. Siano V un dominio di valutazione ed M il suo ideale massimale. Provare che M è principale se e solo se $M \neq M^2$.