Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2014/2055
AL410 - Algebra Commutativa
Esercizi 2

Nel seguito A denota un anello unitario non nullo.

1. Sia A un anello commutativo, siano I e J ideali di A. Provare che A/I e B/J sono A-moduli isomorfi se e solo se $I = J$. Cosa si può dire per gli anelli A/I e A/J ?

2. Siano M un A-modulo ed N, H e L suoi sottomoduli. Provare che se $L \subseteq N$, allora
$$N \cap (H + L) = (N \cap H) + L.$$
Questa uguaglianza è nota come "legge modulare".

   Provare, con un esempio, che questa formula non sussiste se L non è contenuto in N.

3. Provare che il sottoanello $\mathbb{Z}[\frac{p}{q}]$ di $\mathbb{Q}$ non è finitamente generato come $\mathbb{Z}$-modulo se $\frac{p}{q} \notin \ Z$.

4. Sia K un campo. Sia $A \subseteq K[X]$ il sottoanello
$$A = \left\{ f(X) \in K[X] \quad | \quad f(X) = a_0 + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \right\}.$$
Provare che $K[X]$ è un A-modulo finitamente generato.

5. Si riguardi $A[X]$ come A-modulo; allora $N = A[X^2]$ è un A-sottomodulo di $A[X]$. Provare che $A[X]/N \cong A[X]$ come A-moduli.

6. Sia M un A-modulo. Provare che $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$.

7. Provare che $\mathbb{Q}$ come $\mathbb{Z}-$modulo non è finitamente generato.

8. Calcolare $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.