Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014/2015
AL410 - Algebra Commutativa
Esercizi 3

1. Siano M un A-modulo ed f un endomorfismo di M tale che $f \circ f = f$. Provare che
$$M \cong (\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)).$$

2. Sia $u = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
   (a) Provare che esiste una base di $\mathbb{Z}^2$ contenente u se e solo se a e b sono coprimi.
   (b) Sia $u = (5, 12)$; trovare $v \in \mathbb{Z}^2$ tale che (u, v) è una base di $\mathbb{Z}^2$.

3. Provare che se F_1 ed F_2 sono A-moduli liberi, allora anche $F_1 \oplus F_2$ è un A-modulo libero.

   Provare che la somma diretta di una qualsiasi famiglia di A-moduli liberi è un modulo libero.

4. Siano N_1 ed N_2 sottomoduli di un A-modulo M. Verificare che la seguente successione di A-moduli :
$$0 \to N_1 \cap N_2 \xrightarrow{\varphi} N_1 \oplus N_2 \xrightarrow{\psi} N_1 + N_2 \to 0$$
   dove $\varphi(x) = (x, x)$ e $\psi(x, y) = x - y$, è esatta.

5. Siano D un dominio di integrità ed a e b elementi non nulli di D. Siano $M = D/(ab)$ed $N = (a)/(ab)$. Allora M è un D-modulo ed N un suo sottomodulo. Provare che N è un addendo diretto di M se e solo se esistono $c, d \in D$ tali che $ca + db = 1$.

6. Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:
   (a) Un modulo libero è finitamente generato.
   (b) Un modulo finitamente generato è libero.
   (c) Ogni modulo è il quoziente di un modulo libero.
   (d) Un sottomodulo di un modulo libero è libero.
   (e) Un addendo diretto di un modulo libero è libero.