Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2004/2005
AL3 - Fondamenti di Algebra Commutativa
Esercizi 2 - Anelli e ideali

1. Siano R un anello unitario $(1 \neq 0)$ ed a un elemento di R.

   a si dice *nilpotente* se $a^k = 0$, per qualche intero $k \geq 1$;

   a si dice *idempotente* se $a^2 = a$.

   (a) Provare che:

      i. Se R non ha zero-divisori, allora l'unico elemento nilpotente di R è 0 e gli unici elementi idempotenti di R sono 0 e 1.

      ii. Nessuno elemento invertibile di R è nilpotente. L'unico elemento idempotente e invertibile di R è 1.

      iii. Se a è nilpotente, allora $1 - a$ è invertibile in R (determinare esplicitamente il suo inverso). Se a è idempotente, allora $1 - a$ è idempotente.

      iv. Se R è commutativo, l'insieme I degli elementi nilpotenti di R è un ideale di R e l'anello-quoziente R/I è privo di elementi nilpotenti diversi dall'elemento nullo.

   (b) Trovare un anello R non commutativo per il quale gli elementi nilpotenti non costituiscono un ideale.

2. Sia R un anello commutativo unitario e sia $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in R[X]$.

   Provare che:

   (a) $f(X) \in R[X]$ è un elemento invertibile in $R[X]$ se e solo se a_0 è un elemento invertibile di R e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.

   (Sugg. : Se $b_0 + b_1X + + \cdots + b_mX^m$ è l'inverso di $f(X)$, provare per induzione su r che $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$. Dedurne che a_n è nilpotente ed applicare l'esercizio 1 (iii)).

   (b) $f(X) \in R[X]$ è un elemento nilpotente se e solo se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono elementi nilpotenti di R.

   (c) $f(X) \in R[X]$ è uno zero-divisore in $R[X]$ se e solo esiste $a \neq 0$ in R tale che $af = 0$.

   (Sugg. : Sia $0 \neq g(X) = b_0 + b_1X + + \cdots + b_mX^m$ un polinomio di grado minimo tale che $f(X)g(X) = 0$. Se $m = 0$, l'asserto è provato. Altrimenti, $a_n b_m = 0$ da cui $a_n g(X) = 0$. Provare per induzione che $a_{n-r} g(X) = 0$ per $0 \leq r \leq n$. Dedurne che $b_m f(X) = 0$).

(d) $Nil(R[X])$=$Jac(R[X])$.

3. Siano K un campo e $K[[X]]$ l'anello delle serie formali a coefficienti in K. Se $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \neq 0$, sia $o(f) = \min\{n \mid a_n \neq 0\}$ e $o(0) = \infty$; $o(f)$ è detto l' *ordine* della serie formale f.

   (a) Provare che se $f, g \in K[[X]]$, allora:
      i. $o(fg) = o(f) + o(g)$.
      ii. $o(f+g) \geq \min\{o(f), o(g)\}$.
      iii. $f|g$ se e solo se $o(f) \leq o(g)$.
      iv. f è un elemento invertibile in $K[[X]]$ se e solo se $a_0 \neq 0$.
      v. Se $f \neq 0$, allora f e $X^{o(f)}$ sono associati. Dedurne che X è il solo elemento irriducibile (a meno di elementi associati) di $K[[X]]$.
      vi. $K[[X]]$ è un PID. Di fatto, ogni ideale non nullo è generato da X^m per qualche $m \geq 0$.
      vii. $K[[X]]$ possiede un solo ideale massimale e l'unico ideale primo non massimale di $K[[X]]$ è (0).

   (b) Stabilire se $K[[X]]$ è un ED.

4. Sia K un campo. $K((X))$ denoti l'insieme delle serie formali di Laurent in una indeterminata X a coefficienti in K, cioè :

$$K((X)) = \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} a_n X^n \quad | \quad a_n \in K, m \in \mathbb{Z} \text{ qualsiasi} \right\}.$$

   Si definiscano in $K((X))$ le operazioni di somma e prodotto in modo analogo a quelle definite in $K[[X]]$. Verificare che $K((X))$ è il campo dei quozienti di $K[[X]]$.

5. Sia R un anello commutativo unitario. Provare che:

   (a) Se I è un ideale di R, allora $\mathcal{M}_n(I)$ è un ideale di $\mathcal{M}_n(R)$.

   (b) Se J è un ideale di $\mathcal{M}_n(R)$, allora esiste un ideale I di R tale che $J = \mathcal{M}_n(I)$.

   (c) $\mathcal{M}_n(R[X]) \cong \mathcal{M}_n(R)[X]$.

6. Siano $f : A \longrightarrow C$ e $g : B \longrightarrow C$ omomorfismi di anelli commutativi. Si dice *prodotto fibrato di A e B su C*, e lo si denota con $A \times_C B$, una terna (R, f', g'), dove R è un anello commutativo e $f' : R \longrightarrow B$ e $g' : R \longrightarrow A$ sono omomorfismi di anelli tali che $f \circ g' = g \circ f'$ e che valga la seguente proprietà universale:

   se (T, f'', g''), dove T è un anello commutativo e $f'' : T \longrightarrow B$ e $g'' : T \longrightarrow A$ sono omomorfismi di anelli tali che $f \circ g'' = g \circ f''$, allora esiste uno ed un solo omomorfismo anulare $h : T \longrightarrow R$ tale che $f' \circ h = f''$ e $g' \circ h = g''$.

   (a) Provare che due prodotti fibrati di A e B su C sono isomorfi.

   (b) Nell'anello $A \times B$ si consideri il seguente sottoanello:

   $$R = \{(a, b) \quad | \quad f(a) = g(b)\}.$$

   Siano $f' : R \longrightarrow B$ e $g' : R \longrightarrow A$ le restrizioni ad R delle proiezioni canoniche. Provare che (R, f', g') è il prodotto fibrato di A e B su C.

   (c) Siano I_1 e I_2 ideali di un anello commutativo A e $\pi_h : R/I_h \longrightarrow R/I_1 + I_2$ ed $\lambda_h : R/I_1 \cap I_2 \longrightarrow R/I_h$ gli omomorfismi suriettivi canonici $(h = 1, 2)$. Provare che $(R/I_1 \cap I_2, \lambda_1, \lambda_2)$ è il prodotto fibrato di R/I_1 e R/I_2 su $R/I_1 + I_2$.

7. Sia (R, M) un anello locale. Provare che:

   (a) Gli unici elementi idempotenti di R sono 0 e 1.

   (b) La caratteristica di R è zero oppure la potenza di un numero primo.